Teoría de Grupos y Mecánica Quántica

Luis A. Seco

Universidad de Toronto.

Notas del curso impartido en la

Universidad Internacional Menéndez Pelayo,

La Coruña, 27 Junio – 1 Julio, 1994

Preliminares

Este curso recoge diversos temas que se encuentran a caballo entre la teoría de grupos y la mecánica cuántica.

Ya desde el comienzo de la mecánica cuántica, a principios de este siglo, quedaba muy claro que las ecuaciones a las que ésta daba lugar eran, por una parte, no solubles de manera explícita y difíciles de entender, y por otra parte y al mismo tiempo, presentan muchas características de gran simplicidad: son lineales, y por lo general poseen muchas simetrías. A raíz de ésto empezó a emerger una teoría sistemática de entender estas ecuaciones a partir, casi únicamente, de sus simetrías. Esta teoría presentaba muchas similitudes con otras, como por ejemplo las discusiones clásicas de los sólidos regulares, o con los grupos cristalográficos, y la teoría de las representaciones de grupos y álgebras de Lie se instaló de manera permanente en la Física.

Un poco más adelante, y demanera relacionada, se empezó a tratar la física de partículas con armas semejantes, hasta culminar con la clasificación de las partículas a través de las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Hitos históricos en este desarrollo lo constituyen hechos como la predicción, basándose en aspectos puramente teóricos, de la existencia de los bosones vectoriales, que fué más tarde verificada experimentalmente y galardonada con el premio Nobel.

A lo largo de esta exposición, intentaré desarrollar de manera elemental lo más fácil de esta teoría. Aún así, ésta es una teoría que involucra de manera fundamental, además de la física, muchos aspectos de la matemática moderna: geometría, álgebra y análisis real, complejo y funcional. He intentado mantener los prerequisitos al mínimo, en gran parte, basando la exposición en los ejemplos fundamentales, y dejando las generalizacones a los *fans*.

Estas notas están divididas en 5 *clases* (la sexta no está aqui todavía):

Clase 1. Es una introducción rápida a la mecánica cuántica: una clase de física.

Clase 2. Representaciones de grupos finitos: una clase de álgebra.

Clase 3. Grupos de Lie: una clase de geometría.

Clase 4. El grupo de rotaciones: una clase de análisis.

Clase 5. Grupos de Simetría. Se utiliza todo lo anterior para hacer una clase de química.

Por último, lamento que estas notas no estén completas del todo: falta mucho material, a veces están desorganizadas, y seguro que hay más de un fallo. He trabajado duro y hasta aquí he llegado. Agradecería a toda aquella o aquel que encuentre alguno de los muchos errores, que me lo diga.

Clase 1: Introducción

Todos sabemos lo que es un grupo, pero quizá no todos sepamos los fundamentos de la mecánica cuántica, por lo que empezaremos con las ideas básicas en mecánica. No pretendo aqui hacer un desarrolo exaustivo, ni siquiera lógicamente presentado, con postulados, resultados generales, ni nada de eso; simplemente, intentaré desarrollar un poco la intuición debajo de los ejemplos fundamentales. Si alguien quiere, luego, indagar más profundamente, hay muchos textos que lo hacen. Estas notas son solamente una iniciación al tema.

Consideremos un sistema con partículas $x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{R}^3$, con masas m_i, sobre las que actúan fuerzas con potencial $V(x_1, \ldots, x_N)$. El comportamiento de este sistema viene determinado por el Hamiltoniano de la energía, un operador que, actuando sobre una función $\psi(x_1, \ldots, x_N)$, nos da

$$H\psi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar}{2\,m_i}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + V(x_1, \ldots, x_N) \cdot \psi(x_1, \ldots, x_N) \qquad (1.1)$$

Las funciones ψ sobre las que actúa este hamiltoniano se suelen llamar "*funciones de onda*", y cada una viene asociada a un estado del sistema.

La idea es que una función de onda nos da la siguiente información sobre el sistema:

1. La energía: no es más que la integral siguiente

$$\int_{\mathbf{R}^3} \cdots \int_{\mathbf{R}^3} \overline{\psi(x_1, \ldots, x_N)} \cdot H\psi(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_N = \langle H\psi, \psi \rangle\,.$$

2. La posición de las partículas: la probabilidad de encontrar las partículas en el conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^{3N}$ viene dada por la integral

$$\int_\Omega |\Psi(x_1,\ldots,x_N)|^2 \, dx_1 \cdots dx_N. \tag{1.2}$$

Pero, a diferencia de la mecánica clásica, donde cualquier estado imaginable es posible, en mecánica cuántica, los únicos estados aceptables son los dados por funciones de ondas que son autofunciones de H. Y, por dicho en 1 arriba, el autovalor correpondiente es la energía.

Observaciones: Es obvio, por el carácter lineal de el hamiltoniano, que si ψ es autofunción, también lo es $a \cdot \psi$, para cualquier valor de a, y además, ambas tienen la misma energía (o autovalor). Por lo tanto, nos podemos retringir a estados ψ normalizados de manera que satisfagan

$$\int |\Psi|^2 = 1$$

De esta manera, la probabilidad de encontrar partículas sobre todo el espacio, de acuerdo con la fórmula (1.2), es 1, y no entramos en conflicto con una de las leyes fundamentales de la probabilidad.

También, resulta que las constantes $\hbar/2\,m_i$ no afectan el tratamiento teórico del problema, por lo que se suelen tomar de modo que $\hbar/2\,m_i = 1$.

Ejemplos:

1. El sistema más simple es, posiblemente, el de un electron libre (i.e., $V \equiv 0$), confinado a un intervalo, digamos el $[0,1]$. De acuerdo con nuestro esquema, el hamiltoniano está, en este caso, dado por

$$H\psi(x) = -\psi''(x)$$

y las funciones relevantes son aquellas que se anulan en los extremos del intervalo, es decir $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Este sistema es trivial de resolver, y la solución viene dada por los siguientes estados, que denotamos por $\psi_k(x)$:

$$\psi_k(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\big(\pi k x\big), \qquad E_k = \pi^2 k^2.$$

Una consecuencia de esto es que, si ponemos un solo electrón en este tubo, las probabilidades de encontrarlo son mayores si buscamos hacia el centro del tubo que en los extermos.

2. Otro sistema simple, y bastante más relevante que el anterior, aparece cuando consideramos un electrón en una caja en $\mathbb{R}^3$. En este caso,

$$H = -\Delta$$

y las funciones aceptables $\psi(x_1, x_2, x_3)$ son aquellas que se anulan en la frontera del cubo (dicho de otra manera, el espacio de estados es $\mathcal{H} = L^2_0([0,1]^3)$). Después de nuestro primer ejemplo, nos damos cuenta de que

$$\psi_{k_1,k_2,k_3}(x_1, x_2, x_3) = \sin(\pi\, k_1\, x_1) \cdot \sin(\pi\, k_2\, x_2) \cdot \sin(\pi\, k_3\, x_3)$$

son autofunciones, con autovalores $\pi^2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = \pi^2\, k^2$. Este sistema tiene una característica muy importante, que no aparece en el ejemplo anterior: se trata de que hay estados differentes con la misma energía, y no se trata sólo de permutar los k_i entre si (lo que da lugar a funciones differentes, pero que no está claro que sean "muy" differentes; por ejemplo, $\psi_{1,1,5}$ y $\psi_{3,3,3}$ ambas tienen como energía $27\pi^2$.

3. N electrones libres en una caja: ahora, el hamiltoniano está compuesto por las energías cinéticas de todos los electrones, y por tanto tiene la forma

$$H_N = \sum_{i=1}^{N} -\Delta_{x_i}.$$

El que las particulas estén en una caja se traduce en que el espacio de estados está compuesto por funciones que se anulan en la frontera del cubo. Lo de libres quiere decir que no hay interacción entre ellos (hacemos el potencial de repulsión igual a 0). Es fácil darse cuenta de que, si designamos por $\psi_{k_i}(x_i)$ a las autofunciones del ejemplo anterior, podemos obtener autofunciones para H_N sin más que considerar

$$\psi_{k_1,\ldots,k_N}(x_1, \ldots, x_N) = \psi_{k_1}(x_1) \cdots \psi_{k_N}(x_N), \qquad x_i \in \mathbb{R}^3, \quad k_i \in \mathbf{N}^3.$$

Esto tiene un problema, y es el siguiente:

Imaginémonos que tenemos dos partículas descritas por la función de ondas $\psi_{1,1}$: esto quiere decir que las dos partículas se encuentran distribuidas de manera análoga en el espacio: en particular, si buscamos electrones en un determinado recinto Ω, nos podríamos encontrar de hecho los dos de ellos, con una probabilidad bastante alta. Esto va en contra con el principio de exclusión de Pauli (olvidémonos del spin, que todavia no hemos introducido). Una manera chapucera de solucionar ésto es el exigir que todos los k_i sean distintos dos a dos: pero esto, si se considera por ejemplo $\psi_{1,2}$, todavía permite encontrar varios electrones en una región pequeña del espacio. La solución, es la de incluir, como postulado, que las funciones de ondas $\psi(x_1, \ldots, x_N)$ se **anulen** cuando $x_i = x_j$, para $i \neq j$. Dicho de manera más coherente, exigimos que la función $\psi(x_1, \ldots, x_N)$ sea **antisimétrica**, es decir

$$\psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = -\psi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$$

La consecuencia para nuestro análisis es que las funciones de onda que obtenemos para H_N son en realidad el producto antisimétrico de las ψ_{k_i}, no el producto a secas como hicimos antes:

$$\psi_{k_1,\ldots,k_N}(x_1, \ldots, x_N) = \psi_{k_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{k_N},$$

o, dicho de otra manera, una vez elegidos los $(k_1, \ldots, k_N)$, las funciones de ondas en este caso vienen dadas por determinantes

$$\psi_{k_1,\ldots,k_N}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \ldots & \psi_{k_i}(x_1) & \ldots & \psi_{k_N}(x_1) \\ & \ddots & \vdots & & \\ \psi_{k_1}(x_j) & \ldots & \psi_{k_i}(x_j) & \ldots & \psi_{k_N}(x_j) \\ & & \vdots & \ddots & \\ \psi_{k_1}(x_N) & \ldots & \psi_{k_i}(x_N) & \ldots & \psi_{k_N}(x_N) \end{vmatrix}$$

El término $\frac{1}{\sqrt{N!}}$ aparece por razones de normalización. No es difícil ver que con esta elección de $\psi_{k_1,\ldots,k_N}$, que sólo es no–nula cuando los k_i son distintos, obtenemos una energía igual a

$$E_{k_1,\ldots,k_N} = \pi^2 \left(k_1^2 + \cdots + k_N^2\right), \qquad k^2 = |k|^2.$$

Pausamos un momento para reflexionar sobre este nuevo ingrediente, la antisimetría, que nos acaba de aparecer, y así de paso, coger un poco el gustillo a lo que se avecina en las clases posteriores.

Sea la función de ondas $\psi(x_1,\ldots,x_N)$ una autofunción del hamiltoniano (1.1), con autovalor E, sin asumir ningún tipo de simetrías para ψ. Supongamos que el autoespacio de E es unidimensional. Si denotamos por $T_{i,j}$ el operador que permuta dos de las variables x_i y x_j, tenemos que $T_{i,j}\psi$ también es una autofunción de (1.1), con el mismo autovalor E. Por la unidimensionalidad del autoespacio, tenemos que

$$T_{i,j}\psi = \lambda\,\psi, \quad \lambda \neq 0.$$

Por la linearidad de $T_{i,j}$, aplicando $T_{i,j}$ a los dos lados de la acuación anterior, obtenemos que

$$T_{i,j}^2\psi = \lambda^2\,\psi,$$

que, como $T_{i,j}^2$ es la identidad, implica que $\lambda^2 = 1$: es decir, $\lambda = +1$ o $\lambda = -1$. La primera alternativa se traduce en una ψ que es simétrica, mientras que la segunda, se traduce en ψ antisimétrica. Y una de las dos es obligatoria si estamos dispuestos a autorizar autoestados unidimensionales. La notación abstracta para el primer espacio de funciones (las simétricas) es

$$\mathcal{H}_{\mathrm{B}} = \bigotimes_{i=1}^{N} L^2(\mathbb{R}^3),$$

y para las antisimétricas,

$$\mathcal{H}_{\mathrm{F}} = \bigwedge_{i=1}^{N} L^2(\mathbb{R}^3).$$

Desde el punto de vista físico, las dos opciones vienen ligadas a la existencia de dos tipos de párticulas: los **bosones**, que vienen descritos por funciones simétricas, y los **fermiones**, con ψ antisimétrica. Son partículas que disfrutan de propiedades estadísticas totalmente distintas: los bosones se pueden agolpar (de hecho, lo prefieren), los fermiones no quieren ni verse. Afortunadamente, los electrones y protones son fermiones: si fueran bosones, la materia (y nosotros, en particular) no sería estable, pero esto es otro cantar.

4. El oscilador armónico en 1 dimensión.

5. El oscilador armónico en dimensión 3.

6. Varios osciladores armonicos desacoplados.

7. El átomo de hidrógeno.

8. El helio y los otros átomos.

9. Moléculas.

10. Estrellas.

Ejercicios.

1. Cuántos fermiones neutros (electrones sin interaccioón) se pueden meter en una caja de lado 1 (en $\mathbb{R}^3$) antes que la energía total no sobrepase 100 (en nuestras unidades donde $\hbar/2m_e = 1$)?.

2. Suponiendo que tenemos dos fermiones neutros en un tubo unidimensional de longitud 1, en que sitio del tubo es más probable encontrarnos una partícula?.

3. En una ciudad hay tres casinos: el "*Casino Boltzmann*", el "*Casino Bosónico*" y el "*Casino Fermi*". El juego que se practica es el de los dados: se tiran dos dados y si la suma es 7 se gana, si no se pierde. La diferencia entre los casinos es que en el Boltzmann, los dados son distingibles, en el Bosónico, los dados son indistinguibles y en el Fermi, además de ser indistingibles, sucede que los dos dados nunca pueden dar el mismo número.

A qué casino es mejor ir a jugar? Que casino gana más veces?.

Clase 2: Representaciones de Grupos Finitos

Considera un gupo G finito. Una representación de G es un homomorfismo entre G is el grupo de aplicaciones lineales en algún espacio vectorial H

$$T:\, G \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$
$$g \longrightarrow T_g:\, H \to H$$

Ten en cuenta que, como consecuencia particular del hecho que T es homomorfismo, tenemos que $T_1 = \mathrm{Id}$ y que $T_g = T_{g^{-1}}^{-1}$, y por lo tanto los determinantes de T_g nunca se anulan.

Algunos ejemplos:

Hay varios tipos especiales de representaciones:

1. Representaciones Irreducibles: son aquellas con la propiedad que no hay ningún subespacio V (a excepción, claro está, del 0 y H) con la propiedad que $T_g(V) \subset V$ para todo $g \in G$.

2. Si T_g es una transformacion unitaria para todo g, decimos que la representación es unitaria.

3. Representaciones Fieles: son aquellas en las que T es homomorfismo inyectivo; es decir, G es isomorfo a un subgrupo de $\mathcal{L}(H)$. El nombre lo dice todo.

Dos representaciones T^1 y T^2, sobre espacios vectoriales H_1 y H_2, se dicen **equivalentes** si existe un isomorfismo vectorial

$$S:\, H_1 \to H_2$$

tal que $S \circ T_g^1 = T_g^2 \circ S$, i.e., el siguiente diagrama es conmutativo para todo $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{T_g^1} & H_1 \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ H_2 & \xrightarrow{T_g^2} & H_2 \end{array}$$

Lemma 1: *Toda representación es equivalente a una representación unitaria.*

PROOF: Consideremos el operador

$$A = \sum_{g \in G} T_g \, T_g^*$$

donde T_g^* indica el transpuesto de T_g. El operador A es ahora simétrico, y por lo tanto se puede diagonalizar con una matriz U unitaria (i.e., $U^* = U^{-1}$),

$$A = U \, D \, U^{-1}$$

ó,

$$\begin{aligned} D &= U^{-1} \, A \, U \\ &= \sum_{g \in G} U^{-1} \, T_g \, T_g^* \, U \\ &= \sum_{g \in G} \left(U^{-1} \, T_g \, U\right) \left(U^{-1} \, T_g \, U\right)^* \\ \left[B_g \overset{\text{def}}{\equiv} U^{-1} \, T_g \, U\right] \rightarrow \quad &= \sum_{g \in G} B_g \, B_g^* \end{aligned}$$

Es más, $A \geq 0$, y por tanto, $D \geq 0$. Y como ningún elemento de la diagonal de D puede ser 0 (lo que implicaría que el determinante de T_g is 0), podemos hablar de $D^{1/2}$ y $D^{-1/2}$. Entonces, definimos la nueva representación de G como

$$R_g = D^{-1/2} \, B_g \, D^{1/2} = D^{-1/2} \, U^{-1} \, T_g \, U \, D^{1/2}$$

Lo único que queda por probar es que efectivamente R es unitaria (puesto que es trivial que es homomorfismo); para ello, observamos que

$$1 = D^{-1/2} \sum_{g \in G} B_g \, B_g^* \, D^{1/2}$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
R_g\, R_g^* &= D^{-1/2}\, B_g\, D^{1/2} \left(D^{-1/2} \sum_{a\in G} B_a\, B_a^*\, D^{1/2} \right) D^{1/2}\, B_g^*\, D^{-1/2} \\
&= D^{-1/2} \sum_{a\in G} B_g\, B_a\, B_a^*\, B_g\, D^{-1/2} \qquad (2.1)\\
&= D^{-1/2} \sum_{a\in G} B_a\, B_a^*\, D^{-1/2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

puesto que en (2.1), por la homomorfía de las B_g, el multiplicar por B_g no hace sino reordenar la suma. QED

Lemma (Schur): *Una representación es irreducible si, y sólo si, el único operador M que conmuta con todos los T_g a la vez, es un múltiplo de la identidad.*

PROOF: Primero, la implicación fácil: si la representación no es irreducible, tenemos un subespacio V que permanece invariante. Sea pues M el operador de proyección sobre V. Es obvio entonces que $T_g \circ M = M \circ T_g$, pues ambas son iguales a T_g restringido a V, y cero en $V^\perp$

Ahora, la implicación difícil, que es muy útil en la práctica para probar irreducibilidad.

Por el lema anterior, podemos suponer que T es unitaria, y supongamos que $T_g \circ M = M \circ T_g$ para todo $g \in G$.

1. Empezamos con el caso más fácil, que es cuando M es una matriz diagonal: En este caso, si M no es un múltiplo de la identidad, hay dos autoespacios E_1 y E_2 (por lo menos) asociados a autovalores distintos (digamos m_1 y m_2). Entonces, para todo autovector $v \in E_1$, tenemos

$$M(T_g(v)) = m_1\, T_g(v)$$

lo que implica que $T_g(v)$ pertenece a E_1, y así E_1 es invariante (y propio, porque para eso está E_2).

2. Si M es autoadjunto, entonces lo podemos reducir al caso anterior, pues entonces tenemos que si $M = U^{-1}\, D\, U$, con U unitaria, entonces $U\, T_g\, U^{-1}$ es una representación autoadjunta que conmuta con D, y por tanto irreducible, lo que implica que T_g es tambien irreducible.

3. Finalmente, si M no es autoadjunta, entonces observamos que T_g también conmuta con M^*, y por tanto, T_g conmuta también con los operadores autoadjuntos $M_1 = M + M^*$ y $M_2 = i(M - M^*)$. Por lo anterior, tenemos que M_1 y M_2 son múltiplos de la identidad, y por tanto $M = \frac{1}{2}(M_1 - iM_2)$ también. QED

Un problema a la hora de trabajar con representaciones irreducibles es el poder determinar, dadas dos representaciones T^1 y T^2, si son equivalentes o no, es decir, si existe un operador invertible M tal que $M\,T^1 = T^2\,M$. Empezamos a entender ésto pensando hasta que punto es posible que tengamos la relación $M\,T^1 = T^2\,M$ si nos restringimos a operadores no invertibles.

Lemma (Schur II): *Sean T^1 y T^2 dos representaciones unitarias irreducibles no equivalentes. Entonces, el único operador M que cumple*

$$M\,T_g^1 = T_g^2\,M, \qquad \forall g \in G \tag{2.2}$$

es el 0.

PROOF: Empezamos con unas cuantas manipulaciones triviales:
1. $T_g^1\,M^* = M^*\,T_g^2$.
2. $M\,T_g^1\,M^* = M\,M^*\,T_g^2$.
3. $T_g^2\,M\,M^* = M\,M^*\,T_g^2$.

Por el lema de Schur anterior, obtenemos que

$$M\,M^* = \lambda\,I$$

para algun número λ, que tiene que ser positivo, pues $M\,M^* \geq 0$. De hecho, $\lambda = \det{}^2 M$.

Si M es una matriz cuadrada, entonces tiene que ser singular, porque de otra manera tendríamos que T^1 y T^2 son equivalentes. Al ser singular, obtenemos que $\lambda = 0$, lo que imlica que $M = 0$.

Si M no es cuadrada, y $v \in \text{Ker } M$, entonces, por (2.2) concluimos que $T_g^1(v) \in \text{Ker } M$ para todo g. Por la irreducibilidad concluimos que M es inyectiva (ó 0, claro), con lo cual tiene más filas que columnas. Contruimos enonces una nueva matriz cuadrada completando M con ceros

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} & \ddots & \vdots & 0 \\ M & \dots & 0 & \dots \\ & 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Como $\tilde{M}\,\tilde{M}^* = M\,M^*$, repetimos el argumento anterior para concluir que

$$\tilde{M}\,\tilde{M}^* = \lambda\, I$$

donde ahora $\lambda = 0$ sin más que tomar determinantes $(\det \tilde{M} = 0)$. De aquí, se deduce tambiém fácilmente que $\tilde{M} = 0$, y por tanto $M = 0$. QED

Caractéres Asociado a una representación T, podemos definir su carácter,

$$\begin{aligned} \chi :\ & G \longrightarrow \mathbf{C} \\ & g \longrightarrow \chi(g) = \text{Trace } T_g \end{aligned}$$

donde la traza está definida de la manera usual: dada una base del espacio vectorial, $\{a_k\}$,

$$\chi(g) = \text{Trace } T_g = \sum_k \langle T_g(a_k), a_k \rangle$$

y la definición es independiente de la base elegida.

Una propiedad fundamental de los carácteres es que son invariantes por conjugación: es decir $\chi(a^{-1}\,g\,a) = \chi(g)$, debido a que Trace $(AB) =$ Trace (BA) para operadores A y B, por lo que

$$\chi(a^{-1}\,g\,a) = \text{Trace } \left(T_{a^{-1}}\,T_g\,T_a\right) = \text{Trace } \left(T_g\,T_{a^{-1}}\,T_a\right) = \chi(g)$$

Lemma (Ortogonalidad): *Sean χ_1 χ_2 los caracteres de representaciones irreducibles T^1 y T^2: entonces,*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} 1 & \textit{si las representaciones son equivalentes} \\ 0 & \textit{si no lo son.} \end{cases}$$

PROOF: Podemos suponer que las representaciones son unitarias, y consideramos una matriz *cualquiera* X, y formamos el operador

$$M = \sum_{g\in G} T^1_g\, X\, T^{2*}_g.$$

Ahora observamos que

$$\begin{aligned} T^1_a\, M &= \sum_{g\in G} T^1_{ag}\, X\, T^{2*}_g \\ &\sum_{g\in G} T^1_{ag}\, X\, {T^2_{ga}}^*\, T^2_a \\ &= M\, T^2_a. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $M = 0$, y esto es cierto sin importar quien es X. Tomando X de modo que $X(e_i) = e_j$, y el resto ceros, concluimos que

$$\sum_{g\in G}\left\langle T^1_g e_i, e_j\right\rangle \cdot \overline{\left\langle T^2_g e_k, e_l\right\rangle} = 0, \qquad \forall i,j,k,l. \tag{2.3}$$

Por otra parte, si $T^1 = T^2$, entonces consideramos

$$M = \sum_{g\in G} T^1_g\, X\, T^1_g$$

que claramente conmuta con T^1_a, para todo $a \in G$ y por lo tanto tiene que ser un multiplo de la identidad. De aquí, tomando como matrices X las mismas de antes, concluimos que

$$\sum_{g\in G}\left\langle T^1_g e_i, e_j\right\rangle \cdot \overline{\left\langle T^1_g e_k, e_l\right\rangle} = \delta_{j,k}\delta_{i,l}. \tag{2.4}$$

Las relaciones en el enunciado son consecuencia inmediata de (2.3) y (2.4). QED

Corollary : *Dos representaciones irreducibles son equivalentes si y sólo si sus characteres son los mismos.*

Dado un carácter χ, consideremos el vector

$$\big(\chi(g_1), \ldots, \chi(g_{|G|})\big) \in \mathbf{C}^{|G|}$$

El lema anterior nos dice que, en la norma usual de $\mathbf{C}^{|G|}$ dividida por $|G|$, el conjunto de estos vectores es una familia ortonormal. Recordemos ahora que, si $g_1 = a\, g_2\, a^{-1}$, entonces $\chi(g_1) = \chi(g_2)$. Denotemos por N el número de clases de conjugación en G, y por $K = k_1, \ldots, k_N$ a una familia de representantes de las clases de conjugación de G; finalmente, denotemos por m_i al número de elementos en la clase de conjugación de k_i.

Entonces, si ahora dotamos a $\mathbf{C}^N$ con el producto escalar

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i\, \overline{w_i},$$

de la misma manera que antes, deducimos que los vectores

$$V_\chi = (\chi(k_1), \ldots, \chi(k_N))$$

son ortonormales. Esto tiene como consecuencia que el número de representaciones irreducibles de un grupo finito nunca es mayor que el número de clases de conjugación. Bueno, pues el resultado recíproco también es cierto!:

Theorem 2: *El número de representaciones irreducibles de un grupo finito es igual al número de clases de conjugación. En particular, si el grupo es abeliano, este número es igual al orden del grupo.*

Ejercicios.

1. Si G es un grupo simple (i.e., sin subgrupos normales), prueba que toda representación no nula es fiel.

2. Utilizar el lema de Schur I para probar que toda representación irreducible de un grupo abeliano es de dimensión 1.

3. Sea K el subconjunto de G consistente en todos los elementos conjugados a uno dado. Probar que

$$\sum_{g\in K} T_g = \lambda\, I$$

donde T es irreducible.

4. Probar que

$$\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$$

para todo carácter χ.

5. Probar que si el carácter de una representación satisface

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\chi(g)|^2 = 1$$

entonces la representación es irreducible.

6. Si $T \neq 1$, probar que

$$\sum_{g\in G} \langle T_g e_i, e_k\rangle = 0, \qquad \forall i, k.$$

7. Si G es abeliano, y χ es el carácter de una representación irreducible, probar que χ es un homomorfismo

$$\chi :\; G \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbf{C} :\; |z| = 1\}$$

Clase 3: Grupos de Lie

Para grupos no–finitos, la teoría es ligeramente distinta a la expuesta en la clase anterior. Los grupos interesantes tiene la propiedad que, a pesar de ser infinitos, tiene estructura de variedad diferenciable que es compatible con la estructura de grupo: es decir, G tiene un entorno de la identidad U y una aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} \varphi : \big\{(x_1, \dots, x_n) :\ |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq 1\big\} &\longrightarrow U \\ (0, \dots, 0) &\longrightarrow 1, \end{aligned}$$

y los entornos de otro $g \in G$ vienen dados por $g \cdot U$, con la nueva carta φ_g definida por $\varphi_g(g \cdot x) = \varphi(x)$, de modo que las operaciones del grupo son continuas. El número n es la dimensión del grupo.

Algunos ejemplos:

1. Denominamos por $O(2)$ el grupo (conmutativo) de rotaciones del plano

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ :\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

(isomorfo a $S^1 = \{z \in \mathbf{C} :\ |z| = 1\}$ y a $\mathbb{R}/\mathbf{Z}$). Este es un grupo sencillísimo: es compacto, y además abeliano!.

2. $O(3)$, el grupo de rotaciones del espacio. Sus elementos son matrices ortogonales con determinantes ± 1. Obviamente, no es conexo: tiene dos componentes conexas, la de los determinantes $+1$ y -1 respectivamente. Esto es muy importante, como veremos más tarde. Su dimensión es 3. Por lo demás, es compacto también, pero no es abeliano.

3. El grupo unitario bidemsional $U(2)$, compuesto por matrices complejas unitarias. A pesar de ser llamado *bidemsional*, este grupo tiene dimensión real 4. Lo de *bidimensional* viene porque las matrices son 2×2. También es compacto. Viene descrito por las matrices

$$U(2) = \left\{ e^{i\theta} \cdot \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi), \quad a, b \in \mathbf{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

4. El grupo unitario especial

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Tiene dimensión 3, la misma que $O(3)$; y, al igual que $O(3)$, es compacto. Además, resulta que es simplemente conexo: esto no es casualidad, y veremos más adelante que en realidad, $O(3)$ y $SU(2)$ están muy, pero que muy relacionados.

Hay muchos más grupos interesantes, pero paramos aquí, pues estos son los que más nos van a interesar para nuestras aplicaciones. He de mencionar, sin embargo, que una vez que uno se mete de lleno en la física nuclear y de párticulas, grupos como $SU(3)$ (interacciones de párticulas), $SU(6)$ (interacciones fuertes, supermultiplets de particulas elementales,...), incluso $SU(12)$, y productos tensoriales de todos ellos, ..., juegan un papel central.

Una de las ventajas de los grupos finitos es que las cosas se pueden contar. En los grupos de Lie, también!: bueno, contar contar... más bien, integrar. Existe una medida en cada uno de estos grupos (compactos), llamada la medida de Haar (que significa *pelo* en alemán), $d\mu_{\text{Haar}}$, con la propiedad que, para toda función continua f en el grupo, tenemos que

$$\int_G f(g \cdot x)\, d\mu_{\text{Haar}}(g) = \int_G f(g)\, d\mu_{\text{Haar}} \qquad \text{(Invarianza por traslaciones)}$$

y el "volúmen" del grupo es 1, i.e.,

$$\int_G 1\, d\mu_{\text{Haar}} = 1$$

En el futuro, denotaremos esta medida por dg sin más, en vez de $d\mu_{\text{Haar}}$.

Pero los grupos de Lie tienen una ventaja sobre los grupos finitos, de la misma manera que los números reales tienen una ventaja sobre los enteros: y es que se pueden tomar derivadas. Para ver la ventaja de manera muy simple, hagamos lo siguiente:

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x| \leq 1$, tenemos que $\varphi(x)$ es una matriz. Consideremos las derivadas parciales evaluadas en la identidad

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_1 = I_i$$

obteniendo de esta manera n matrices I_i, que se denominan **matrices infinitesimales** de G. Desde el punto de vista de la geometría diferencial, no estamos nada más que diciendo que el espacio tangente al 1 está generado por las I_i. Bueno, pues resulta que el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) generado por estas matrices I_i determinan el grupo de manera única:

Primero, observa que si en vez de la funcón φ de arriba, tomaramos otra, $\tilde{\varphi}$, con las mismas características, (y además, de manera que

$$\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} = (f^1, \ldots, f^n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad f^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es diferenciable y no singular), entonces nos encontraríamos con otras matrices $\tilde{I}_i$, que, por la regla de la la cadena, cumplen

$$\tilde{I}_i = \sum_j \left.\frac{\partial f^j}{\partial x_i}\right|_0 \cdot I_j \tag{3.1}$$

A continuación, nos fijamos que todo elemento $a \in G$ se puede incluir en un subgrupo de dimensión 1; es decir, existe un homomorfismo continuo

$$g : \mathbb{R}^1 \longrightarrow G$$

tal que $g(\theta) = a$ para alguún θ (ésto es un resultado general para todo grupo de Lie, pero para los que tenemos entre manos, dicho homomorfismo se puede contruir explicitamente: en el caso,por ejemplo, de S^2, sería el círculo máximo a través de a). en cualquier caso, tenemos que

$$\begin{aligned} &g(\theta_1 + \theta_2) = g(\theta_1)\, g(\theta_2) \\ &g(0) = 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si diferenciamos respecto a θ_2 en ambos lados de (3.2), y hacemos $\theta_2 = 0$, obtenemos que g satisface la ecuación diferencial

$$g'(\theta) = I\, g(\theta)$$

donde $I = g'(0) \in T_1 G$. Es decir, resolviendo la ecuación obtenemos

$$g(\theta) = e^{I\cdot\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k\, I^k}{k!}$$

con lo que podemos conlcuir

$$G = \left\{ e^{\theta\cdot I}\, :\, \theta \in \mathbb{R}^1,\, I \in T_1 G \right\}$$

Es decir, la información sobre el grupo (las representaciones, en particular) se podrán obtener en base a las matrices I_i que generen $T_1 G$. Pero la gracia de las I_i no acaba aquí:

Si φ es la función coordenada que de lugar a nuestra elección de I_i, consideremos, fijado $g_0 \in G$, la nueva función coordenada $\varphi_{g_0}(g) = g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1}$. La matrices $I_j^{g_0}$ que nos da φ_{g_0} son

$$I_j^{g_0} = g_0 \cdot I_j \cdot g_0^{-1},$$

que siguen perteneciendo a $T_1 G$. Si hecemos entonces $g_0 = \varphi(t \cdot e_i)$, y diferenciamos respecto a t, obtenemos que

$$\frac{dg_0}{dt} = I_i, \qquad \frac{dg_0^{-1}}{dt} = -I_i$$

y por tanto, utilizando la fórmula del producto, obtenemos que

$$\left.\frac{dI_j^{g_0}}{dt}\right|_{t=0} = I_i\, I_j - I_j\, I_i$$

que sigue perteneciendo a $T^1 G$. Es decir, el **conmutador**

$$[\,I_i\,, I_j\,] = I_i\, I_j - I_j\, I_i = \sum_k c_{i,j}^k\, I_k.$$

Las constantes $c_{i,j}^k$ se denominan **constantes de estructura** del grupo de Lie. Dicho de manera abstracta, $T_1 G$ es un álgebra, el **álgebra de Lie** de G, con las operaciones dadas por la suma y conmutación.

Ejemplos.

Vamos a calcular ahora las matrices infintesimales para cada uno de los ejemplos anteriores.

1.

$$I_1 = \frac{d}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Para el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$, encontrar un sistema coordenado alreededor de I que nos de las matrices de manera elemental, no es fácil. Es mucho más conveniente utilizar las tres curvas siguientes a través de la identidad:

$$g_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad g_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

cuyas derivadas en $\theta = 0$, nos dan las tres matrices tangentes a G en I siguientes:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que cumplen las relaciones de conmutación siguientes

$$[I_1, I_2] = I_3 \qquad [I_2, I_3] = I_1 \qquad [I_3, I_1] = I_2$$

Observa que las relaciones de conmutaión anteriores se parecen de manera muy sospechosa a las reglas del producto vectorial usuales para los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

3. (Este nos lo saltamos, porque el siguiente es mas fácil, y $U(2)$ se sigue de $SU(2)$).

4. Como para $O(3)$, utilizamos un truquillo: sea $A \in SU(2)$, y notemos que

$$\text{Trace } A = a + \overline{a} \leq 2|a| \leq 2$$

y por otra parte, la traza de la identidad es 2. Eso quiere decir que la funcion $A \to$ Trace A tiene un máximo en I, y por tanto su derivada es 0. Es decir, la traza de las matrices infinitesimales tiene que ser 0, o lo que es lo mismo, el espacio tangente a $SU(2)$ en I esta compuesto por las matrices de traza 0. A continuación, nos fijamos que el subespacio de matrices de traza 0 está generado por las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puesto que, toda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$ se puede escribir como

$$A = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z = \begin{pmatrix} -z & x+iy \\ x-iy & z \end{pmatrix}, \quad \text{con} \begin{cases} x = \frac{1}{2}\,(a_{12} + a_{21}) \\ y = \frac{1}{2i}\,(a_{12} - a_{21}) \\ z = -a_{11} \end{cases}$$

Eso quiere decir que $T_1 G$ esta generado por las σ. Estas matrices σ se denominan las matrices de spin de Pauli, y aparecen por todas partes.

Representationes.

Una representación de G es un homomorfismo entre G is el grupo de aplicaciones lineales (acotadas) en algún espacio de Hilbert

$$\begin{aligned} T:\, G &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ g &\longrightarrow T_g:\, H \to H \end{aligned}$$

Al igual que en caso de las matrices infinitesimales, uno puede considerar los **operadores infinitesimales**,

$$X_i = \frac{\partial}{\partial g_i}\bigg|_1 T_g.$$

que, como veremos a continuación, satisfacen las mismas propiedades de conmutación que las matrices infinitesimales. Recogemos este resultado en el siguiente lema:

Lemma 3.1: *Si el grupo G tiene a $c_{i,j}^k$ como constantes de estructura, entonces también tenemos las relaciones*

$$[X_i\,, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k\, X_k.$$

Además, si la representación es unitaria, los operadores diferenciales complen la relación

$$X_i^* = -X_i.$$

PROOF: Lo que la definición de los X_i qiere decir es que, si

$$g = \exp\left(\sum_{i=1}^n t_i\, I_i\right) = I + \sum t_i\, I_i + \mathcal{O}\big(|t|^2\big)\,, \tag{3.3a}$$

entonces

$$T_g = \mathrm{Id} + \sum t_i\, X_i + \mathcal{O}\big(|t|^2\big)\,, \tag{3.3b}$$

y, en particular,

$$T_{g^{-1}} = \mathrm{Id} - \sum t_i\, X_i + \mathcal{O}\big(|t|^2\big)\,.$$

A propósito, ésta relación prueba la última conclusión del lema.

Del mismo modo, si

$$g' = \exp\left(\sum_{i=1}^n t_i'\, I_i\right) = I + \sum t_i'\, I_i + \mathcal{O}\big(|t'|^2\big)\,,$$

entonces,

$$T_{g'} = \mathrm{Id} + \sum t_i'\, X_i + \mathcal{O}\big(|t'|^2\big)\,,$$

con lo que

$$\begin{aligned} T_{g^{-1}\,g'\,g} &= \mathrm{Id} + \sum_i t'_i\, T_{g^{-1}}\, X_i\, T_g + \mathcal{O}\big(|t'|^2\big) \\ &= \mathrm{Id} + \sum_i t'_i X_i + \sum_{i,j} t'_i\, t_j\, (X_i\, X_j - X_j\, X_i) + \mathcal{O}\big(|t'|^2 + |t'|\, t^2\big) \qquad (3.4). \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}\, g'\, g &= 1 + \sum_i t'_i\, g^{-1}\, I_i\, g + \mathcal{O}\big(|t'|^2\big) \\ &= 1 + \sum_i t'_i I_i + \sum_{i,j} t'_i\, t_j\, (I_i\, I_j - I_j\, I_i) + \mathcal{O}\big(|t'|^2 + |t'|\, t^2\big) \\ &= 1 + \sum_i t'_i I_i + \sum_{i,j,k} t'_i\, t_j\, c^k_{i,j}\, I_k + \mathcal{O}\big(|t'|^2 + |t'|\, t^2\big)\,. \end{aligned}$$

Por (3.3a,b), para cada t fijo, esto implica que

$$T_{g^{-1}\,g'\,g} = 1 + \sum_i t'_i X_i + \sum_{i,j,k} t'_i\, t_j\, c^k_{i,j}\, X_k + \mathcal{O}\big(|t'|^2 + |t'|\, t^2\big)\,,$$

que, comparándolo con (3.4), nos dice que

$$[\,X_i\,, X_j\,] = \sum_{i,j,k} c^k_{i,j}\, X_k \qquad (3.5).$$

Como consecuencia, a la hora de buscar las representaciones del grupo G, bastará el limitar la búsqueda a aquellas matrices que satisfagan estas relaciones de conmutación. Dicho de otra manera, el álgebra de Lie de G delimita las represenationes irreducibles. El recíproco sólo es cierto de manera local.

Representaciones de S^1. Como es abeliano y compacto, todas sus representaciones son unidimensionales, cuyos caractéres, que equivalen a las representaciones mismas, son homomorfismos continuos de S^1 en sí mismo. Es un ejercicio bastante fácil el ver que dichos caractéres tienen que ser

$$\chi_n(z) = z^n, \qquad n \in \mathbf{Z}, \quad z \in S^1,$$

o, equivalentemente, las representaciones T^n vienen dadas por

$$\begin{aligned} T^n_\theta \ : \ \mathbb{C} &\mapsto \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{2\pi i n\theta}\, z \end{aligned}$$

Si hacemos $H = \mathbb{R}^2$, entonces obtenemos una representación T^1 definiendo

$$T^1_g(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De hecho, podemos definir representaciones T^n sin más que hacer

$$T^n_g(x,y) = T^1_{g^n}(x,y)$$

cuando n es entero.

El interés de S^1 es múltiple:

Primero, hemos visto que nuestros grupos tiene la propiedad que todo elemento se puede incluir en un subgrupo isomorfo a S^1. Esto tiene como consecuencia que las representaciones de S^1 van a estar presentes de alguna manera u otra en todos los grupos que consideremos.

Primero, si llamamos $\chi_n(\theta) = e^{2\pi i n\theta}$ a los caractéres de S^1, la fórmula de inversión de Fourier que todos sabemos (o no?) se puede escribir como

$$f(x) = \sum_\chi \langle \chi_n, f\rangle\ \chi(\theta), \qquad f \in L^2\left(S^2\right).$$

Es decir, los carácteres generan $L^2(G)$, al menos cuando $G = S^1$. Para un grupo arbitrario *compacto y conmutativo* como S^1, lo mismo es cierto. Para los grupos no abelianos, algo semejante es cierto, y se conoce como el teorema de Peter–Weyl; pero aqui no nos vamos a meter. En lo que sínos vamos a meter es en deducir aquí, basándonos solamente en la teoría de grupos, es la fórmula de inversión de Fourier.

Theorem (Fourier–Plancherel): *Sea $f(\theta)$ una función en $L^2[0,1]$. Entonces, tenemos la fórmula siguiente:*

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat f(0)\, e^{2\pi i n\theta}, \qquad \hat f(n) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt,$$

donde la igualdad y suma infinita se interpretan en el sentido de L^2.

PROOF: Lo único que hay que probar es que el subespacio de L^2 que generan las funciones $e^{2\pi in\theta}$ es denso en $L^2[0,1]$.

Lo primero que observamos es que podemos identificar $[0,1]$ con S^1 de manera obvia, pues L^2 no cambia. Después, se denotamos por H el subespacio generado por $e^{2\pi in\theta}$, consideramos su ortogonal, $H^{\perp}$. Si $H^{\perp} \neq \{0\}$, como H es invariante por rotaciones, $H^{\perp}$ también lo es, y por tanto hay una representación irreducible (y por tanto unidimensional) de S^1 definida sobre $H^{\perp}$. La continuidad de la representación se sigue del hecho de que si H tiene todas las funciones continuas, entonces H generaría S^1. Su carácter por lo tanto tiene que ser un elemento de $H^{\perp}$, lo cual es una contradicción: vimos antes que los únicos caracteres de S^1 son los $e^{2\pi in\theta}$. QED

Ejercicios.

Problema 1. Dado $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2)$, definamos

$$T_g^{\alpha}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\theta) & \sin(\alpha\theta) \\ -\sin(\alpha\theta) & \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dí por qué T^{α} sólo define una representación de $O(2)$ en el caso que α es un entero.

Clase 4: Rotaciones

Aqui empieza la diversión: consideremos una representación unitaria con operadores infinitesimales X_x, X_y, X_z.

Por el Lema 3.1, las matrices

$$J = i\,X$$

son autoadjuntas, y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\,J_x\,,J_y\,] = i\,J_z, \quad [\,J_y\,,J_z\,] = i\,J_x, \quad [\,J_z\,,J_x\,] = i\,J_y.$$

Cambiamos de matrices de nuevo, para considerar las tres nuevas siguientes:

$$J_\pm = J_x \pm i\,J_y, \qquad J_z.$$

La razón es las leyes de conmutación que ahora satisfacen $J_\pm$ y J_z;

$$\begin{aligned} & [\,J_z\,,J_\pm\,] = i\,J_y \pm J_x = \pm(J_x \pm i\,J_y) = \pm J_\pm. \\ \Big(\text{Además:} \qquad & [\,J_+\,,J_-\,] = 2\,J_z.\Big) \end{aligned}$$

Como consecuencia de ésto, si ψ es un autovalor de J_z con autovalor λ, ahora $J_\pm\psi$ es un autovector de J_z con autovalor $\lambda \pm 1$, puesto que

$$\begin{aligned} J_z\,(J_\pm\psi) &= (J_\pm\,J_z \pm J_\pm)\;\psi \\ &= (\lambda \pm 1)\,J_\pm\psi. \end{aligned}$$

Por esta razón, a los $J_\pm$ se les suele llamar operadores que *suben* y *bajan*, como los ascensores.

En primer lugar, vamos a deducir la dimensión que tiene el espacio vectorial V donde actúa alguna representacion irreducible T, de $O(3)$. Primero, consideramos el subgrupo unidimensional K cuyo generador infitesimal es I_z corresponde a J_z, es decir

$$K = \{\exp(t\, I_z),\ t \in \mathbb{R}\}\,,$$

que es isomorfo a S^1. Como la representacion irreducible restringida a K es también una representación (aunque quizá no irreducible), tenemos que T, restrinida a K, es suma directa de representaciones cuyos autovalores son numeros enteros. Escojemos una base de V compuesta de estos autovectores, $\{e_k\}$, y denotamos por l al autovalor más alto que aparece. Esto implica que $J_+ e_l = 0$, de otra manera, $J_+ e_l$ tiene autovalor $l+1$. Como, por otra parte, J_- disminuye los autovalores, tenemos que podíamos haber escogido la base $\{e_k\}$ de modo que

$$\begin{aligned} e_{l-1} &= A_{l-1}\, J_- e_l \\ e_{l-2} &= A_{l-2}\, J_- e_{l-1} \\ e_{l-3} &= A_{l-3}\, J_- e_{l-2} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

si más que dejar los otros autovectores para el final (veremos dentro de unas líeas que, de hecho, no hay más vectores que éstos). Con este proceso de aplicar J_- reiteradamente, deberíamos llegar a 0. Es decir, $J_- e_t = 0$, para algún entero t. Veremos ahora que $t = -l$.

Definimos

$$\begin{aligned} J^2 &= J \cdot J \\ &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\,(J_+\, J_- + J_-\, J_+) + J_z^2 \\ &= J_-\, J_+ + J_z^2 + J_z && (4.1a) \\ &= J_+\, J_- + J_z^2 - J_z && (4.1b) \end{aligned}$$

que es positivo porque los $J_{x,y,z}$ son autoadjuntos. Ahora observamos que, usando (4.1a),

$$J^2 e_l = (l^2 + l)\, e_l.$$

De hecho, como $[J^2, J_-] = 0$, obtenemos que

$$J^2 e_{l-1} = A_{l-1} J^2 e_l = l(l+1) A_{l-1} e_l = l(l+1) e_{l-1},$$

y de la misma manera, por inducción, obtenemos que

$$J^2 e_m = (l^2 + l) e_m, \qquad m = t, \ldots, l. \tag{4.2}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} J^2 e_t &= (J_+ J_- + J_z^2 - J_z) e_t \\ &= (t^2 - t) e_t, \end{aligned}$$

que, comparando con (4.2) nos da $t^2 - t = l^2 + l$, o, lo que es lo mismo, $t = -l$, tal y como queríamos.

Ahora pasamos a probar que los $e_{-l}, \ldots, e_l$ generan todo V si T es irreducible. Llamemos V' al espacio generado por éstos. V' es claramente invariante por J_z (todos son autovectores de J_z), y por J_- (así se han construido). Nos falta ver que también son invariantes por J_x: de esta manera sería también invariante por $\exp(aJ_x + bJ_y + cJ_z)$, para cualquier a, b, c y por tanto, sería invariante por cualquier T_g, $g \in O(3)$.

La invarianza por J_x la vemos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} J_+ e_m &= A_m J_+ J_- e_{m+1} \\ \text{[usando (4.1b)]} \qquad &= A_m \left(J^2 - J_z^2 + J_z\right) e_{m+1} \\ &= A_m \left(l(l+1) - (m+1)^2 + (m+1)\right) e_{m+1}. \end{aligned}$$

Acabamos utilizando todo ésto para calcular las matrices infinitesimales de las representaciones de una manera explícita. Utilizamos, por supuesto, la base que hemos construido en los párrafos anteriores.

Por lo dicho anteriormente, tenemos

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A_{-l} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & A_{-l+1} & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{l-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & A_l & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & A_{l-1} \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_z = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ & & -l \end{pmatrix}.$$

Por tanto, tenemos

$$X_x = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}A_{-l+1} & 0 & dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}A_{-l+1} & 0 & -\frac{i}{2}A_{-l+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}A_{-l+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{i}{2}A_{l-1} & 0 & -\frac{i}{2}A_l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{i}{2}A_l & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}A_{-l+1} & 0 & dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}A_{-l+1} & 0 & -\frac{1}{2}A_{-l+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{-l+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2}A_{l-1} & 0 & -\frac{1}{2}A_l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}A_l & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_z = \begin{pmatrix} il & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ & & -il \end{pmatrix}.$$

Esto tiene como consecuencia que podemos escribir las representaciones como

$$T_l = e^{t_1 X_x + t_2 X_y + t_3 X_z} \tag{4.3}$$

.

Carácteres.

En primer lugar, notamos que dos giros son conjugados si y solo si son tienen el mismo ángulo de giro respecto a su eje. Por lo tanto, los carácteres son funciones de una variable, el ángulo θ. Dado un giro g, denotamos por $\theta(g)$ el ángulo de giro de g. Eligiremos como representante especialmente simple de las clases de equivalencia a los giros con eje el eje z.

Por lo tanto, dado podemos escribir el carácter como

$$\begin{aligned}
\chi_l(\theta) &= \text{Trace } e^{\theta\, X_z} \\
&= \text{Trace } \begin{pmatrix} e^{il} & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ & & e^{-il} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=-l}^{l} e^{i\,j\,\theta} \\
&= \frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= D_l(\theta)
\end{aligned}$$

donde D_l denota el bien conocido núcleo de Dirichlet.

Armónicos Esféricos.

En este apartado vamos a construir de manera explicita representaciones del grupo de rotaciones. Estas vendrán dadas como determinados espacios de polinomios, cuyos operadores infinitesimales van a resultar ser determinados operadores diferenciales muy conocidos.

Empezamos con éstos operadores, definidos por

$$X_x = z\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_y = x\,\frac{\partial}{\partial z} - z\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_z = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y},$$

que no son sino las componentes del operador vectorial que llamamos **rotacional** (a partir de ahora, por razones obvias), es decir

$$(J_x, J_y, J_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Los operadores que suben y bajan son ahora

$$J_+ = J_x + i\,J_y = z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) - (x + i\,y)\frac{\partial}{\partial z}$$
$$J_- = J_x - i\,J_y = -z\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) + (x - i\,y)\frac{\partial}{\partial z}$$

Los **armónicos esféricos**

$$\mathrm{Y}_m^{(l)}(x, y, z), \qquad m = l, \cdots, 0, \cdots, l,$$

vienen definidos de la manera siguiente: para cada l no negativo, empezamos son

$$\mathrm{Y}_l^{(l)} = (x + i\,y)^l$$

y los demás $\mathrm{Y}_m^{(l)}$ se definen a aplicando J_- repetidamente. Después de bastantes cuentas, se puede llegar a la fórmula explicita, que no necesitaremos,

$$\mathrm{Y}_m^{(l)}(x, y, z) = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\,\pi\,2^l\,l!\,(l+m)!}\right) e^{im\phi}\,\sin^m\theta \cdot \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m} \left(\cos^2\theta - 1\right).$$

Clase 5. Grupos de Simetría

Consideremos el hamiltoniano facilón dado por

$$H\psi(x) = -\psi''(x)$$

donde ψ es una función que se anula en los extremos del intervalo $[-1,1]$. Este sistema describe un electrón libre restringido al tubo unidimensional $[-1,1]$. Si ψ es un estado del sistema, con energía E, resulta que $\psi(-x)$ también es un estado, con la misma energía, pues

$$-\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} = -\psi''(-x) = E\,\psi(-x).$$

como este sistema tiene energícon multiplicidad 1, necesitamos que $\psi(-x) = \lambda\,\psi(x)$; repitiendo el argumento obtenemos que $\lambda^2 = 1$, y por lo tanto todo estado ψ es par o impar. Lo interesante aquí es que hemos podido deducir ésto sin resolver la ecuación, sólo con mirar las simetrías del hamiltoniano (bueno, también hemos utilizado la unidemsionalidad del autoespacio).

De manera general, diremos que H es invariante por una transformación $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ si se cumple que

$$\langle H\,\psi_1, \psi_2\rangle = \langle H\,T\psi_1, T\psi_2\rangle\,, \qquad \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H} \qquad (5.1).$$

Las transformaciones que utilizaremos más a menudo serán las que se originen en el espacio de configuraciones, $T : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{3N}$, donde la transformación correpondiente en $\mathcal{H}$ viene dada, claro está, por $\psi(x) \to \psi(Tx)$. Observa ahora que (5.1) es justamente el tipo de invarianza que hemos utilizado en el ejemplo anterior.

En nuestras aplicaciones, nos interesará de manera especial aquellas invarianzas que se obtienen con elementos de un grupo, T_g con $g \in G$, donde

$$T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2} \tag{5.2}$$

Este era el caso del ejemplo anterior: ahí, $G = \mathbf{Z}_2$, T_1 =Identity, $T_{-1}\psi(x) = \psi(-x)$, y H es invariante bajo T_1 (claro) y T_{-1}. Yendo un poco más lejos, nos damos cuenta de que (5.2) en realidad significa que lo que tenemos entre manos en una representación (de dimensión infinita, quizás) entre G sobre $\mathcal{H}$, dada por T_g.

Lemma 5.1: *Si H es invariante por T_g, donde T es una representación unitaria de G sobre $\mathcal{H}$, entonces tenemos que*

$$H\,T_g = T_g\,H.$$

El recíproco también es cierto.

PROOF: Como T_g es unitaria, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle H\psi_1, \psi_2 \rangle &= \langle H\,T_g\psi_1, T_g\,\psi_2 \rangle \\ &= \left\langle T_g^{-1} H\,T_g\psi_1, \psi_2 \right\rangle \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo ψ_2, tenemos que

$$H = T_g^{-1}\,H\,T_g$$

que es lo que queríamos. El recíproco sale igual. QED

Una consecuencia de este lema es que, en los subespacios que reducen a T, H conmuta con la representación irreducible correspodiente, y por lo tanto, H es un múltiplo de la identidad. Es decir, esos espacios reductores son los autoespacios de H. Esto tiene como consecuencia el resultado siguiente

Theorem (Wigner): *Si H admite a G como grupo de simetrías, y las representaciones irreducibles de G tienen dimension n_i, entonces los autoespacios de H tienen también dimension n_i.*

PROOF: Descomponemos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \mathcal{H}_n \oplus \cdots = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

de modo que T_g es ahora irreducible en cada $\mathcal{H}_n$. T_g tiene la forma

$$T_g = \begin{pmatrix} T_g^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & T_g^{(2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $T_g^{(n)} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ es irreducible. De hecho, escogiendo los vectores de la base muy cuidadosamente, podemos hacer que si dos de las $T_g^{(n)}$ son equivalentes, de hecho son *iguales.*

Sobre esta descomposición, H actúa de modo que

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots \\ H_{21} & H_{22} & \dots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Las propiedades de conmutación entre T_g y H se traducen en las relaciones siguientes:

$$H_{ij} T_g^{(j)} = T_g^{(i)} H_{ij}, \qquad \forall i, j \geq 1, \, \forall g \in G.$$

Si $T^{(i)}$ no es equivalente a $T^{(j)}$, tenemos que, por el segundo lema de Schur, $H_{ij} = H_{ji} = 0$.

Cuando T_i es equivalente a T_j, por la observación anterior sabemos que son de hecho la misma, y tenemos que H_{ij} conmuta con ellas y por tanto $H_{ij} = \lambda_i \cdot \mathrm{Id}_i$.

Leyes de Conservación. Como T_g es una representación unitaria, tenemos que $T_g^* T_g = I$. Diferenciando respecto a g en la dirección e_j, y después evaluando en $g = I$, obtenemos que $I_j^* = -I_j$. En otras palabras, las matrices $B_j = -i\, I_j$ son autoadjuntas. Por otra parte, es obvio que también conmutan con H, con lo que obtenemos

$$H\, B_j = B_j\, H.$$

La interpretación física de este fenómeno es la de que los observables B_j son invariantes bajo la evolución dada por la ecuación de Schrödinger.

Apéndice 1. The Group SL(2,R).

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \; : \; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ with } \det\, g = 1 \right\}$$

Such matrices give linear fractional transformations of the plane from $\overline{\mathbf{C}}$ to $\overline{\mathbf{C}}$ leaving the upper and lower half planes invariant and send $\overline{\mathbb{R}}$ to itself, and $\Im z = t$ to $\Im z = \frac{t}{|\gamma z + \delta|^2}$. Given any two complex numbers z and w, with strictly positive imaginary parts, we can always find $g \in SL(2,\mathbb{R})$ such that $g(z) = w$. Similarly, given any two $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, distinct, we can always map then to any other two distinct points on the extended real line.

We consider the subgroups of $SL(2,\mathbb{R})$ given by the rotations of angle θ,

$$K = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

(they are the stability group of i). The subgroup of translations

$$T = \left\{ \tau_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbb{R} \right\}$$

and the subgroup of dilations,

$$D = \left\{ \delta_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} \right\}$$

The special case of a rotation with angle $\frac{\pi}{2}$ will be called inversion, and is given by $z \to -1/z$.

Lemma : *Let* $g \in SL(2, \mathbb{R})$*, and let* $\mathrm{Trace}\ g = a+d$*. Then* g *is conjugate to a rotation, translation or dilation depending on whether* $|\mathrm{Trace}\ g|$ *is smaller, equal or bigger than* 2*.*

PROOF: Note that g fixes the points

$$z_0 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

If $\mathrm{Trace}\ g < 2$, we must have $c \neq 0$ and one of the fixed points lies on the upper half plane. If $h \in SL(2, \mathbb{R})$ sends z_0 to i, we have that hgh^{-1} leaves i fixed and is thus a rotation.

If $\mathrm{Trace}\ g = 2$, then $z_0 (a-d)/2c$ is fixed. Let $h \in SL(2, \mathbb{R})$ such that $h(z_0) = \infty$. Then, hgh^{-1} leaves ∞ fixed. Thus, $hgh^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ and $a + d = 2$ (since $\mathrm{Trace}\ gh = \mathrm{Trace}\ hg$). Therefore, hgh^{-1} is a translation.

If $\mathrm{Trace}\ g > 2$, then $x_1 \neq x_2$ are both real and left fixed under g. Let h such that $h(x_1) = 0$ and $h(x_2) = \infty$. Then hgh^{-1} leaves both 0 and ∞ fixed and is thus a dilation. QED

Elements are called *elliptic* if conjugate to rotations, *parabolic* if conjugate to translations, and *hyperbolic* if conjugate to dilations.

Lemma A1.1: *Let* $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$*, and let* $z_0 \in \mathbf{C}$ *such that* $gz_0 = z_0$*. Then,* $Cz_0 + D$ *is an eigenvalue of* g*.*

PROOF: Computation shows that

$$Cz_0 + D = \tfrac{1}{2} \left(-\mathrm{Trace}\ g \pm \sqrt{\mathrm{Trace}\ g^2 - 4} \right)$$

which exactly solves the eigenvalue equation $\lambda^2 - \mathrm{Trace}\ g + 1 = 0$. QED

The formula

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{c^2}\frac{-1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

if $c \neq 0$, and the obvious one when $c = 0$ shows that $SL(2,\mathbb{R})$ is generated by dilations, translations and inversions. We also have the following Iwasawa decomposition of $SL(2,\mathbb{R})$:

Theorem : *Every $g \in SL(2,\mathbb{R})$ can be written in a unique way as*

$$g = k \cdot \tau \cdot \delta$$

where k is a rotation, τ is a translation and δ is a dilation.

PROOF: Uniqueness follows by observing that $K \cap AN = \{1\}$. To show existence, let e_1, e_2 be the canonical bases for $\mathbb{R}^2$, and consider ge_1, ge_2, obviously linearly independent. We use Graham–Schmidt to orthonormalize them into u_1, u_2, which shows that the linear map $u_i \to ge_i$ is upper triangular, or, in other words, a product of a diagonal matrix and a translation. Since the map $e_i \to u_i$ is unitary, we succeeded in writing $g = kan$ where k is a rotation with angle θ, n is a translation and a is diagonal. Taking determinants we see that the elements of a have the same sign, which we can assume positive by changing θ into $\theta + \pi$ is need may be. QED

Note that the decomposition $g = k \cdot \delta \cdot \tau$ also holds (for different choices of $k \in K$, $\delta \in D$ and $\tau \in T$).

$SL(2,\mathbb{R})$ is a 3-dimensional manifold. If we choose as local coordinates

$$g_\alpha^+(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \frac{1+\beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \qquad g_\alpha^-(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & \frac{1+\beta\gamma}{-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$g_\beta^+(\alpha,\beta,\delta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{-1+\alpha\delta}{\beta} & \delta \end{pmatrix} \qquad g_\beta^-(\alpha,\beta,\delta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \frac{1-\alpha\delta}{\beta} & \delta \end{pmatrix}$$

where the g_α are defined on $\alpha > 0$ and the g_β are defined on $\beta > 0$. These coordinate patches cover all of $SL(2,\mathbb{R})$ since α and β cannot vanish simultaneously. With this choice it is easy to see that $SL(2,\mathbb{R})$ is an orientable manifold, since

$$\left(g_\beta^+\right)^{-1} \circ g_\alpha^+(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\alpha, \beta, \frac{1+\beta\gamma}{\alpha}\right) \qquad \left(g_\beta^-\right)^{-1} \circ g_\alpha^+(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\alpha, -\beta, \frac{1+\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

defined on $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and $\alpha > 0$, $\beta < 0$ respectively, and

$$\left(g_\beta^+\right)^{-1} \circ g_\alpha^-(\alpha,\beta,\gamma) = \left(-\alpha, \beta, \frac{1+\beta\gamma}{-\alpha}\right) \qquad \left(g_\beta^-\right)^{-1} \circ g_\alpha^-(\alpha,\beta,\gamma) = \left(-\alpha, -\beta, \frac{1+\beta\gamma}{-\alpha}\right)$$

defined also on $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and $\alpha > 0$, $\beta < 0$ respectively. Their Jacobians are

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (\alpha > 0, \beta > 0) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (\alpha > 0, \beta < 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & -\frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (\alpha > 0, \beta > 0) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & -\frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (\alpha > 0, \beta < 0)$$

which always have positive determinants.

The Iwasawa decomposition introduces another coordinate system, namely the one given by $g \to (\theta, b, t)$. This coordinates are clearly compatible with the other ones, since multiplication is clearly smooth, and, for the inverse, the Graham–Schmidt procedure is also smooth. The Iwasawa decomposition does more than that, namely it defines for us the Haar measure on $SL(2,\mathbb{R})$ in a trivial way, namely by $\frac{1}{2\pi}\, d\theta\, db\, dt$.

Theorem : *The measure defined by*

$$dg = \tfrac{1}{2\pi}\, d\theta\, db\, dt$$

is invariant under right multiplication.

PROOF: We consider right invariance first. It is clearly enough to show invariance under multiplication by translations, dilations and the inversion transformation. Dilation invariance is trivial, since it merely induces a translation in t. For translations, note the Iwasawa decomposition $\delta_t \cdot \tau_{b'} = \tau_{f(b',t)} \cdot \delta_t$ (since the rotation component has to be 1), for some function $f(b',t)$. Then

$$k_\theta \cdot \tau_b \cdot \delta_t \cdot \tau_{b'} = k_\theta \cdot \tau_{b+f(b',t)} \cdot \delta_t$$

Invariance then follows by changing variables in the db integral to $b + f(b',t)$, which is a (t–dependent) translation in b and does not change the measure.

For inversions, denoting by ι the inversion transformation, note that

$$\delta_t \cdot \iota = \iota \cdot \delta_{-t} \qquad \tau_b \cdot \iota = k_{h(b)} \cdot \tau_{g(b)} \cdot \delta_{l(b)}$$

for measurable functions $h(b)$, $g(b)$ and $l(b)$, and at least g is smooth (l is too, and h smooth on the circle). Multiplying by ι on the right again above yields, by the uniqueness of the Iwasawa decomposition, that $g\big(g(b)\big) = b$, which implies $g(b) = \pm b$. As a result, we have that

$$k_\theta \cdot \tau_b \cdot \delta_t \cdot \iota = k_{\theta + h(b)} \cdot \tau_{\pm b} \cdot \delta_{-t+l(b)}$$

which integrates to the same thing. QED

Theorem : *On the local coordinates given by the* $g^{+,-}_{\alpha,\beta}$ *, the Haar measure is given by*

$$dg = \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{|\alpha|} \text{ if } \alpha \neq 0 \qquad dg = \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{|\beta|} \text{ if } \beta \neq 0$$

PROOF: Note that

$$k_\theta \cdot \tau_b \cdot \delta_t = \begin{pmatrix} e^t \cos\theta & be^{-t}\cos\theta - e^{-t}\sin\theta \\ e^t \sin\theta & be^{-t}\sin\theta + e^{-t}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

which implies that

$$\left(g^+_\alpha\right)^{-1} (k_\theta \cdot \tau_b \cdot \delta_t) = \left(e^t \cos\theta \,,\, be^{-t}\cos\theta - e^{-t}\sin\theta \,,\, e^t \sin\theta\right)$$

and therefore

$$J \left(g^+_\alpha\right)^{-1} (k_\theta \cdot \tau_b \cdot \delta_t) = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & \alpha \\ \cdot & e^{-t}\cos\theta & \cdot \\ \alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

which has determinant

$$-e^{-t}\cos\theta \left(\alpha^2 + \gamma^2\right) = -e^t \cos\theta = -\alpha$$

The case for g^-_α is entirely similar, and the case for the g_β is carried out also similarly.

Corollary : *The set of parabolic points has measure 0.*

Corollary A1.2: *For $g \in SL(2,\mathbb{R})$, denote its eigenvalues by λ and λ'. Then,*

$$|\lambda - \lambda'|^{-1} \in L^p_{\mathrm{loc}}(SL(2,\mathbb{R})), \qquad (1 \le p < 2).$$

PROOF: Note that, on compact sets, its only singularities arise from the parabolic points. Say g_0 is parabolic, and N is a neighborhood of g_0. Since there is a sin $SL(2,\mathbb{R})$ such that $g_0 = a^{-1} \cdot \tau_b \cdot a$, we have

$$\int_N |\lambda - \lambda'|^{-p}\, dg = \int_{a\cdot N\cdot a^{-1}} |\lambda - \lambda'|^{-p}\, dg$$

It is therefore enough to assume that our function is integrable inside an arbitrary compact neighborhood of a translation τ_b. Here, since

$$|\lambda - \lambda'| = \sqrt{\text{Trace } g^2 - 4}$$

we have, for a neighborhood–dependent number M, and M–dependent constant C,

$$\begin{aligned}\int |\lambda - \lambda'|^{-p}\, dg &\le C \cdot \int_0^M \int_{-M}^M \int_{\frac12}^{\frac32} |\alpha + \gamma - 2|^{-p/2}\, \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{|\alpha|} \\ &\le C \cdot \int_0^{2M} \int_{-M}^M \int_{\frac12}^{\frac32} \left|\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta\gamma - 2\right|^{-p/2} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\end{aligned}$$

Set

$$F_y(x) = x + x^{-1} - y - 2 \qquad x \in [\tfrac12, \tfrac32] \quad y \ge 0$$

For all $y \ge 0$ (we only care about y small), F_y is convex, and vanishes at $r_i(y)$, $i = 1, 2$. Clearly, $|1 - r_i| \sim \sqrt{y}$, since $F_0 \sim x^2$. Also, $F_y'(r_i) \sim r_i$, which implies

$$F_y(x) \ge c \cdot \sqrt{y} \cdot |x - r_i|$$

where i is trivially determined according to whether x is to the right or left of 1.

After all this, usung the fact that $p/2 < 1$, we get

$$\int_0^{2M} \int_{-M}^M \int_{\frac12}^{\frac32} \left|\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta\gamma - 2\right|^{-p/2} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \le A_p \int_0^{2M} \int_{-M}^M |\beta\gamma|^{-p/4}\, d\beta\, d\gamma$$

which is clearly finite. QED

Remark: Two non–parabolic elements are conjugate to each other if and only if they have the same eigenvalues. Parabolic elements can be grouped into two conjugacy classes: the conjugates of the identity, and those conjugate to a any non–zero translation.

Representations.

A representation of a group is a group homomorphism between that group and the group of invertible linear bounded transformations on a Hilbert space. The resentation is called unitary if each transformation is unitary. The representation is called *irreducible* if there are no non–trivial closed invariant subspaces. The character of a representation T is a complex valued map defined on the group as

$$\chi(g) = \text{Trace } T(g)$$

Since the trace is a commutative relation, we have that $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ for all g, h in the group. Thus, characters are conjugate invariant.

The principal series For $s \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon = 0$ or 1, define

$$g \to \mathcal{P}_g = \mathcal{P}_g^{s,\varepsilon} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f \longrightarrow \mathcal{P}_g f(x) = |-\gamma x + \alpha|^{-1+is} \text{sign}^{\ \varepsilon}(-\gamma x + \alpha)\, f\left(\frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}\right)$$

where $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$.

Theorem : *The previous $\mathcal{P}^{s,\varepsilon}$ constitute a set of unitary representations of $SL(2,\mathbb{R})$ over $L^2(\mathbb{R})$. $\mathcal{P}^{s,\varepsilon}$ is irreducible iff $(s,\varepsilon) \neq (0,1)$.*

PROOF: $\mathcal{P}_g$ is clearly an isometry since $\frac{d}{dx}(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}) = \frac{1}{(\gamma x+\delta)^2}$.

To check that $\mathcal{P}_{g\cdot h} = \mathcal{P}_g \cdot \mathcal{P}_h$ just observe that if $h = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ and $g \cdot h = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ then

$$\begin{pmatrix} S & -Q \\ -R & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

therefore, if $y = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}$, then $(-\gamma x + \alpha) \cdot (-Cy + A) = -Rx + P$.

$\mathcal{P}^{0,1}$ is not irreducible, because $H^2(\mathbf{R})$ is invariant under all $\mathcal{P}^{0,1}_g$. Since H^2 is clearly invariant under all $g \in T$ or $g \in D$, it is enough to check invariance under the inversion transformation. We thus need to show that

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)$$

is a function in H^2 when f is. Consider functions $f \in H^2 \cap \mathcal{S}$, which are easier to handle, aions of $SL(2, \mathbf{R})$ over $L^2(\mathbf{R})$. $\mathcal{P}^{s,\varepsilon}$ is irreducible iff $(s, \varepsilon) \neq (0, 1)$.

PROOF: $\mathcal{P}_g$ is clearly an isometry since $\frac{d}{dx}(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}) = \frac{1}{(\gamma x + \delta)^2}$.

To check that $\mathcal{P}_{g \cdot h} = \mathcal{P}_g \cdot \mathcal{P}_h$ just observe that if $h = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ and $g \cdot h = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ then

$$\begin{pmatrix} S & -Q \\ -R & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

therefore, if $y = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}$, then $(-\gamma x + \alpha) \cdot (-Cy + A) = -Rx + P$.

$\mathcal{P}^{0,1}$ is not irreducible, because $H^2(\mathbf{R})$ is invariant under all $\mathcal{P}^{0,1}_g$. Since H^2 is clearly invariant under all $g \in T$ or $g \in D$, it is enough to check invariance under the inversion transformation. We thus need to show that

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)$$

is a function in H^2 when f is. Consider functions $f \in H^2 \cap \mathcal{S}$, which are easier to handle, and put

$$F(z = x + it) = g_t(x) = \frac{1}{x + it} \cdot f\left(\frac{-1}{x + it}\right)$$

Note that $F(z)$ is a continuous function defined on the closed upper half–space, including infinity. Indeed, when $z \to 0$, we simply use the inequality $|f(z)| \leq |z|^{-2}$ from the previous chapter. When $z \to \infty$, we simply use that f is bounded. When z tends to the real line, away from 0 and infinity, we use the results from the previous chapter directly. Therefore,

$$g_{t,M}(x) = g_t(x) \cdot \chi_{[-M,M]}(x)$$

is uniformly continuous, and it follows that its Fourier transform is "almost" t–independent, in the sense that

$$\widehat{g_{t,M}}(\xi) = \widehat{g_{t',M}}(\xi) + \mathcal{O}\left(\frac{|t-t'|}{M}\right) \qquad t,t' > 0$$

which is easily seen using Cauchy's theorem on a rectangle, the vertical sides of which give rise to the O term. Thus, by continuity,

$$\widehat{g_{t,M}}(\xi) = \widehat{g_{0,M}}(\xi) + \mathcal{O}\left(\frac{|t|+1}{M}\right)$$

Since g_0 has the same L^2–norm as f, it follows that

$$\|g_{t,M}\|_2 \leq \|f\|_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1+|t|}{M}\right)$$

and, taking $M \to \infty$, we see that all the $g_t \in L^2$, with a norm uniformly bounded by $\|f\|_2$, and thus F is an L^2–bounded extension of f to the upper half plane. This means that $\mathcal{P}^{0,1}$ leaves $H^2 \cap \mathcal{S}$ invariant, and thus leaves all of H^2 invariant, by density and unitarity.

To prove that when $(s,\varepsilon) \neq (0,1)$ $\mathcal{P}^{s,\varepsilon}$ is irreducible, we show that there are no other bounded operators in $L^2(\mathbf{R})$ (other than the identity) that commute with $\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_g^{s,\varepsilon}$ for all $g \in SL(2,\mathbf{R})$.

Say $H\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_g H$ for all $g \in SL(2,\mathbf{R})$. Restricting ourselves to the subgroup of translations g, we find that H must have a multiplier $m(\xi)$. Restricting now to the subgroup of dilations, we find that $m(\lambda\xi) = m(\xi)$ for all $\lambda > 0$, which implies that

$$m(\xi) = \begin{cases} c_1 & \text{if } \xi > 0 \\ c_2 & \text{if } \xi < 0 \end{cases} \tag{A1.1}$$

In other words, H must be a multiple of the identity on both H^2_+ and on H^2_- (although the multiplicity constant could be different). We will see that $c_1 = c_2$.

Rewrite (A1.1) as

$$H = \tilde{c}_1 \cdot I + \tilde{c}_2 \cdot \text{H.T.}$$

where H.T. denotes the Hilbert transform, and $\tilde{c}_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ and $\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)$. Since I commutes with anything, we conclude that either $c_1 = c_2$ (in which case H is a multiple of the identity) or the Hilbert transform commutes with all $\mathcal{P}_g$. We will see that the second alternative does not hold. Assume it is, i.e., assume that

$$\text{H.T.} \circ \mathcal{P}_g = \mathcal{P}_g \circ \text{H.T.} \quad \text{for all } g \in SL(2, \mathbf{R})$$

Since H.T. maps H^2 into itself and in fact H.T. $\lceil_M = 1 \lceil_M$ if and only if $M \subset H^2$, then, if $f \in H^2$ we obtain

$$\mathcal{P}_g(f) = \text{H.T.}\,(\mathcal{P}_g(f))$$

which implies that $\mathcal{P}_g(f) \in H^2$ for all $g \in SL(2, \mathbf{R})$. Taking $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ we see that

$$|x|^{1-is} \text{sign}\,^{\varepsilon}(-x) \cdot f(-1/x) \in H^2$$

Since $f \in H^2$, $f(x + it)$ is analytic for $t > 0$ which implies that $f(-1/x)$ also extend to $\mathbf{R}^2{}_+$ analytically, namely as $f(-1/(x + it))$, which then implies that

$$F(x) = |x|^{1-is} \text{sign}\,^{\varepsilon}(-x)$$

extends as a meromorphic function $F(x + it)$ to the upper half plane. Since

$$(-1)^{\varepsilon} \cdot e^{(1-is)(\log|z| + i\theta(z))}$$

extends $F(x)$ to the first quadrant, by unique continuation we must have

$$F(z) = (-1)^{\varepsilon} \cdot e^{(1-is)(\log|z| + i\theta(z))} \qquad \text{Im } z > 0$$

and thus we should have

$$F(x) = (-1)^{\varepsilon} \cdot e^{(1-is)(\log|x| + i\pi)} \qquad x < 0$$

In other words, we should have

$$(-1)^{\varepsilon} \cdot e^{(1-is)(\log|x| + i\pi)} = |x|^{1-is}$$

or, in other words,

$$(-1)^{\varepsilon} \cdot e^{s\pi} = 1$$

which implies $s = 0$ and $\varepsilon = 1$.

The previous representations give rise to the Principal Series. For the Discrete Series, we consider the following:

Define

$$\mathcal{H}_k^+ = \left\{ f(x+it) \text{ analytic for } t>0 \ : \ \|f\|_k^2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |f(x+it)|^2\, t^k\, dx\, dt < \infty \right\}$$

We define

$$\mathcal{D}_{g^{-1}} f(x) = (\gamma x + \delta)^{-(k+2)} f(gx) \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

Note that if $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, then $w - \bar{w} = \frac{z - \bar{z}}{|\gamma z + \delta|^2}$. Thus,

$$\Im w = \frac{\Im z}{|\gamma z + \delta|^2} \qquad dw = \frac{dz}{(\gamma z + \delta)^2} \qquad dw\, d\bar{w} = \frac{dz\, d\bar{z}}{|\gamma z + \delta|^4}$$

and

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{D}_{g^{-1}} f\right\|_k^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2{}_+} \frac{|\Im z|^k}{|\gamma z + \delta|^{2(k+2)}} |f(z)|^2\, dz\, d\bar{z} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2{}_+} \frac{|\Im w|^k |\gamma z + \delta|^{2k}}{|\gamma z + \delta|^{2(k+2)}} |\gamma z + \delta|^4 |f(w)|^2\, dw\, d\bar{w} \\ &= \|F\|_k^2 \end{aligned}$$

Therefore $\mathcal{D}_g$ is a unitary transformation.

The $\mathcal{D}_g$ are always irreducible, as can be seen as follows: Say that U is a non-empty closed invariant subspace. U always contains a function with $f(i) \neq 0$, by simply taking $h \in U$ which does not vanish at, say, z_0, and considering $g \in SL(2, \mathbb{R})$ such that $g(z_0) = i$: then, note that $\mathcal{D}_g(h)(i) = g(z_0) \neq 0$. Let f be such function not vanishing at i, and consider the following function of z, which also belongs to U:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \mathcal{D}_{k_\theta} f(z)\, d\theta$$

Note that $F(i) = i$, but we won't need this. In fact, $F(z)$ can be explicitly computed for all z, by setting $\zeta = e^{i\theta}$, and putting

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \left(-z\sin\theta + \cos\theta\right)^{-(k+2)} f\left(\frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{-n} \left(z\frac{(\zeta - \zeta^{-1})}{2i} + \frac{(\zeta + \zeta^{-1})}{2} \right)^{-(k+2)} \cdot f\left(\frac{z\frac{(\zeta+\zeta^{-1})}{2} + \frac{(\zeta-\zeta^{-1})}{2i}}{-z\frac{(\zeta-\zeta^{-1})}{2i} + \frac{(\zeta+\zeta^{-1})}{2}} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Except for the $\frac{d\zeta}{\zeta}$, the integrand above is analytic for all ζ, and equals $(2i)^n(z+i)^{-n}f(i)$ at $\zeta = 0$. Therefore, by Cauchy's theorem, we have that $F(z) = (2i)^n(z+i)^{-n}f(i)$.

This implies that $(z+i)^{-n} \in U$, for any U which is left invariant under the $\mathcal{D}_g$. But this is impossible if u is non–trivial, because the same should be true for its orthogonal, whose intersection with U is $\{0\}$. Hence, $\mathcal{D}_g$ is irreducible.

The compact picture. Given $z \in S^1$, we have that $x = U(z) = -i\frac{z+1}{z-1}$ falls on the real line. If z is in the unit disc D, then x is in the upper half plane.

For the principal series, we define the operator

$$\mathcal{U}_s : L^2\left(\mathbf{R}^1\right) \longrightarrow L^2\left(S^1\right)$$

$$f(x) \longrightarrow \mathcal{U}_s f(z) = \frac{\sqrt{2}}{|z-1|^{1-is}} f\left(-i \cdot \frac{z+1}{z-1}\right)$$

Since $dx = \frac{2\,|dz|}{|z-1|^2}$ we have that $\mathcal{U}_s$ is an isometry. We note that its inverse is given by

$$\mathcal{U}_s^{-1} : L^2\left(S^1\right) \longrightarrow L^2\left(\mathbf{R}^1\right)$$

$$f(x) \longrightarrow \mathcal{U}_s f(w) = \frac{2^{\frac{1}{2}-is}}{|wi-1|^{1-is}} f\left(\frac{wi+1}{wi-1}\right)$$

Now we use this to pass from the representations on $L^2(\mathbf{R})$ to representations on $L^2(S^1)$,

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbf{R}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathcal{U}_s"'] & L^2(\mathbf{R}) \arrow[d, "\mathcal{U}_s"] \\ L^2(S^1) \arrow[r, "T^* \overset{\text{def}}{\equiv} \mathcal{U}_s \circ T \circ \mathcal{U}_s^{-1}"] & L^2(S^1) \end{tikzcd}$$

Similarly, we define T_* via the inverse commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} L^2(S^1) & \overset{T}{\longrightarrow} & L^2(S^1) \\ \mathcal{U}_s \uparrow & & \uparrow \mathcal{U}_s \\ & T_* \overset{\text{def}}{\equiv} \mathcal{U}_s^{-1} \circ T \circ \mathcal{U}_s & \\ L^2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbf{R}) \end{array}$$

We thus define representations on S^1 by

$$\mathcal{P}_g^{s,0\,*} = \mathcal{U}_s \mathcal{P}_g^{s,0} \circ \mathcal{U}_s^{-1}$$

or, more explicitely, if $g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, and

$$\begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

then

$$\mathcal{P}_g^{s,0\,*} f(z) = |Cz + D|^{-1+is} f\left(\frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

Here,

$$\begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

and the $\frac{1}{2}$ factor, although useless when we view the matrix as a fractional transformation of the upper half space, is needed here. In the case $\varepsilon = 1$ we use instead

$$\mathcal{U}^s : \, L^2\left(\mathbf{R}^1\right) \longrightarrow L^2\left(S^1\right)$$

$$f(x) \longrightarrow \mathcal{U}^s f(z) = \frac{\sqrt{2}}{(z-1)|z-1|^{-is}} f\left(-i\frac{z+1}{z-1}\right)$$

and we get

$$\mathcal{P}_g^{s,0\,*} f(z) = (Cz + D)^{-1} |Cz + D|^{is} f\left(\frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

Note that if $f \in C^\infty(S^1)$, then $\mathcal{P}_g^{s,\varepsilon,*} f$ is also smooth on S^1, since, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ being a mapping from the unit sphere into istelf, $Cz + D$ cannot vanish.

For the discrete series, we note that if $z \in D$ and $w = Uz$, then

$$\Im w = \frac{1 - |z|^2}{|z-1|^2} \qquad dw\, d\bar{w} = \frac{4\, dz\, d\bar{z}}{|z-1|^4}$$

This implies that

$$\iint_{\Im w > 0} |f(w)|^2 \, (\Im w)^k \; dw\, d\bar{w} = \int_D |f(Uz)|^2 \, \frac{4\left(1 - |z|^2\right)^k}{|z-1|^{2(k+2)}} \, dz\, d\bar{z}$$

We thus introduce the Hilbert space

$$\mathcal{H}_k(D) = \left\{ F \in H(D) \; : \; \int_D \left(1 - |z|^2\right)^k \; |F(z)|^2 \, dz\, d\bar{z} < \infty \right\}$$

with the scalar product $\langle \; , \; \rangle_k$ given as $L^2(|dz|^2/(1 - |z|^2)^{k/2})$; note that the sup–norm dominates $\|\cdot\|_k$ and therefore, $\{z^k\}$ is an orthogonal basis, which in particular shows that H^∞ is dense in $\mathcal{H}_k$.

We now define the isometry

$$\mathcal{U}_k \, : \, \mathcal{H}_k^+ \longrightarrow \mathcal{H}_k(D)$$

$$F \longrightarrow \mathcal{U}_k F(z) = \frac{2}{|z-1|^{k+2}} F\left(-i \cdot \frac{z+1}{z-1} \right)$$

We note that its inverse is given by

$$\mathcal{U}_k^{-1} \, : \, H_k(D) \longrightarrow \mathcal{H}_k^+$$

$$f \longrightarrow \mathcal{U}_s f(w) = 2^{-k-3} \cdot |wi - 1|^{k+2} f\left(\frac{wi+1}{wi-1} \right)$$

Now, as before, we use this to pass from the representations on $\mathcal{H}_k^+$ to representations on $H_k(D)$. We omit the details, and simply note that we can thus define representations on D by

$$\mathcal{D}_g^{k,*} = \mathcal{U}_k \circ \mathcal{D}_g^k \circ \mathcal{U}_k^{-1}$$

or, more explicitely, if $g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, and

$$\begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{\equiv} g^{*-1} (A1.3)$$

then

$$\mathcal{D}_g^{k,*} f(z) = (Cz + D)^{-k} f\left(\frac{Az+B}{Cz+D}\right)$$

Here,

$$\begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

and the $\frac{1}{2}$ factor, although useless when we view the matrix as a fractional transformation of the upper half space, is needed here. Note as above that, if $f \in C^\infty(S^1)$, then $\mathcal{P}_g^{s,\varepsilon,*} f$ is also smooth on S^1, since, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ being a mapping from the unit sphere into itself, $Cz + D$ cannot vanish.

Note that the operation $*$ defined in (A1.3) satisfies the relation $g^{*-1} = g^{-1*}$.

Characters. In this section we derive formulas for the characters of the principal and discrete series.

Proposition : *The character associated to the principal series is given by*

$$\Theta_{s,\varepsilon}(g) = \text{Trace } \mathcal{P}^{s,\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{|\lambda|^{is} + |\lambda|^{-is}}{|\lambda - \lambda^{-1}|} \cdot [\text{sign } \lambda]^\varepsilon & \textit{if } g \textit{ is hyperbolic} \\ 0 & \textit{if } g \textit{ isn't} \end{cases}$$

PROOF: Consider $\varphi \in C_0^\infty(SL(2, \mathbb{R}))$. Define the operator on $L^2(\mathbb{R}^1)$ given by

$$A_\varphi = \int_{SL(2,\mathbb{R})} \varphi(g) \cdot \mathcal{P}_g^{s,\varepsilon}$$

we have that

$$A_\varphi f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} |-\gamma x + \delta|^{-1+is} \cdot [\text{sign }(-\gamma x+\delta)]^{\varepsilon}$$

$$\cdot f\left(\frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}\right) \frac{d\beta\, d\gamma\, d\alpha}{\alpha} \qquad (A1.2a)$$

$$\left(y = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha} \qquad \beta(x, y; \alpha, \gamma) = \alpha y - \frac{x}{\gamma x - \alpha}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta(x,y;\alpha,\gamma) \\ \gamma & \frac{1+\beta(x,y;\alpha,\gamma)\cdot\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot |-\gamma x + \alpha|^{-1+is} f(y)\, dy\, d\gamma\, d\alpha \quad (A1.2b)$$

which shows that A_φ has as kernel

$$K_\varphi(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta(x,y;\alpha,\gamma) \\ \gamma & \frac{1+\beta(x,y;\alpha,\gamma)\cdot\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot |-\gamma x + \alpha|^{-1+is}\; d\gamma\, d\delta$$

which is smooth since, when $|\gamma x - \alpha|^{-1+is}$ goes to infinity, so does β, which makes φ vanish. In particular,

$$\text{Trace } A_\varphi = \int K_\varphi(x,x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta(x,x;\alpha,\gamma) \\ \gamma & \frac{1+\beta(x,x;\alpha,\gamma)\cdot\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot |-\gamma x + \alpha|^{-1+is}\; d\gamma\, d\delta\, dx$$

Now, we change variables to (α, β, γ). In doing this, we must have

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = x$$

or, x is one of the fixed points for $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. This immediately tells us that the integral is going to be restricted to the hyperbolic g, since x must be real. For one of these x, we note that $\gamma x + \delta$ equals one of the eigenvalues of g (Lemma A1.1), which we denote by $\lambda(g)$. Therefore, since $\partial\beta/\partial x = \delta\left(1 - (\gamma x + \delta)^{-2}\right)$, we have

$$dx = \delta^{-1}\left(1 - \lambda^{-2}\right)\, d\beta \qquad (\text{mod } d\gamma\, d\alpha)$$

Doing the same for the other fixed point, which would give us the other eigenvalue $\lambda(g)^{-1}$, adding up the result, we obtain

$$\text{Trace } A_\varphi = \int_{SL(2,\mathbb{R})} \varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left(\frac{|\lambda|^{-1+is} + |\lambda|^{1-is}}{|1-\lambda^{-2}|} \, [\text{sign } (\lambda)]^{\varepsilon} \right) dg$$

which gives us the result. QED

We now turn to the computation of the character of the discrete series. We begin with a general lemma concerning traces of operators on spaces of analytic functions.

Lemma A1.3: *Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space of analytic functions on D, which has $\{z^n\}_{n\geq 0}$ as an orthogonal dense subset. Assume an operator T is given by the formula*

$$TF(z) = \int_{S^1} K(z,y)\, F(y)\, |dy|$$

for a function $K \in C^\infty(S^1 \times S^1)$. Then, T is trace class, and

$$\text{Trace } T = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 1} \iint_{S^1 \times S^1} \frac{K(z,y)}{1-\rho \bar{z} y} \, |dy|\, |dz|$$

PROOF: Write

$$K(z,y) = \sum_{k,l \in \mathbf{Z}} a_{k,l}\, z^k\, \bar{y}^l$$

with

$$a_{k,l} = \iint_{S^1 \times S^1} K(z,y)\, \bar{z}^k\, y^l \, \frac{|dz|\,|dy|}{4\pi^2}$$

Then,

$$T(z^n) = 2\pi \sum_k a_{n,k}\, z^k$$

Therefore,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle Tz^n, z^n \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{S^1 \times S^1} K(z,y) \bar{z}^n \, y^n \, |dz| \, |dy| \\
&= \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \iint_{S^1 \times S^1} K(z,y) \bar{z}^n \, y^n \, |dz| \, |dy| \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 1} \iint_{S^1 \times S^1} \frac{K(z,y)}{1 - \rho \bar{z} y} \, |dy| \, |dz|
\end{aligned}
$$

QED

In order to state the main result, note that the eigenvalues of g elliptic can be distinguished as λ_{in} and λ_{out} as follows: g fixes two points, one in the upper half–space, the other in the lower half–space; thus g^* fixes a point inside D, z_1. From Lemma, if $g^{*-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $Cz_1 + D$ is an eigenvalue of g^{*-1}, thus of g. We call this one λ_{in}.

a point inside D, z_1. From Lemma, if $g^{*-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $Cz_1 + D$ is an eigenvalue of g^{*-1}, thus of g. We call this one λ_{in}. For g hyperbolic, we also denote by λ_{in} the eigenvalue λ such that $|\lambda| < 1$.

Proposition : *The character associated to the discrete series is given by*

$$
\Theta_k(g) = \text{Trace } \mathcal{D}^k = -\frac{|\lambda_{\text{in}}|^{k-1}}{\lambda_{\text{in}} - \lambda_{\text{out}}}
$$

PROOF: For $w \in S^1$, define g_w such that

$$
{g_w}^{-1*} = \begin{pmatrix} Aw & Bw \\ C\bar{w} & D\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \bar{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}
$$

where, as usual, we have set $g^{*-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

For $\varphi \in C_0^\infty(SL(2,\mathbf{R}))$. Define

$$
A_\varphi^* = \int_{SL(2,\mathbf{R})} \varphi(g) \mathcal{D}_g^{k,*} \, dg
$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{SL(2,\mathbb{R})} \int_{S^1} \varphi(g_w) \mathcal{D}^{k,*}_{g_w} \, |dw| \, dg$$

$$= \int_{SL(2,\mathbb{R})} A^g_\varphi \, dg$$

for

$$A^g_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \varphi(g_w) \mathcal{D}^{k,*}_{g_w}$$

We examine the behavior of A^g_φ testing on functions $F(z) \in H^\infty(D)$, for which

$$\mathcal{D}^{k,*}_{g_w} F(z) = (C\bar{w}z + D\bar{w})^{-k-2} \, F\left(w^2 \phi_g(z)\right) \qquad \text{for } \phi_g(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

makes sense for $z \in S^1$. Then,

$$A^g_\varphi F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} w^{k+2} (Cz+D)^{-k-2} F\left(w^2 \phi_g(z)\right) \cdot \varphi(g_w) \, |dw|$$

We change variables to

$$y = w^2 \phi_g(z) \quad w = \pm \sqrt{\frac{y}{\phi_g(z)}} \quad dy = 2w\phi_g(z) \, dw$$

which implies $|dy| = 2\,|dw|$, since we took $z \in S^1$, and $w \in S^1$ also. Therefore, if we set

$$\tilde{\varphi}_g(z,y) = w^{k+2} \varphi(g_w) + (-w)^{k+2} \varphi(g_{-w}) \qquad w = w(y,z)$$

we obtain

$$A^g_\varphi F(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} \tilde{\varphi}_g(z,y) \, F(y) \, (Cz+D)^{-k-2} \, |dy|$$

In other words,

$$A^g_\varphi F(z) = \int_{S^1} K^g_\varphi(z,y) \, F(y) \, |dy| \qquad K^g_\varphi(z,y) = \frac{1}{4\pi} \tilde{\varphi}_g(z,y) \, (Cz+D)^{-k-2}$$

which then yields

$$A_\varphi F(z) = \int_{S^1} K_\varphi(z,y) \, F(y) \, |dy| \qquad K_\varphi(z,y) = \int_{SL(2,\mathbb{R})} K_g(z,y) \, dg$$

We now invoke Lemma A1.3 to conclude that

$$\text{Trace } A_\varphi = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\rho\to 1} \iiint_{S^1\times S^1\times SL(2,\mathbb{R})} \frac{\tilde{\varphi}_g(z,y)\,(Cz+D)^{-k-2}}{1-\rho\bar{z}y}\, dg\,|dy|\,|dz|$$

changing variables back to $y = w^2\phi_g(z)$ with $|dy| = 2|dw|$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\rho\to 1} \iiint_{S^1\times S^1\times SL(2,\mathbb{R})} \frac{(Cz+D)^{-k-2} w^k \varphi(g_w)}{1-\rho\bar{z}w^2\phi_g(z)}\, dg\,|dz|\,|dw|$$

$$= \lim_{\rho\to 1} \int_{SL(2,\mathbb{R})} \Theta_\rho(g)\,\varphi(g)\,dg$$

for

$$\begin{aligned}\Theta_\rho(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \frac{(Cz+D)^{-k-2}}{1-\rho\bar{z}\phi_g(z)}\,|dz| \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{(Cz+D)^{-k-2}}{1-\rho\bar{z}\phi_g(z)}\,\frac{dz}{z} \\ &= \sum_{\text{poles } a_j\in D} \mathrm{Res}_{a_j}\left(\frac{(Cz+D)^{-k-2}}{z-\rho\phi_g(z)}\right)\end{aligned}$$

Residues come as fixed points

$$\rho\phi_g(z) = z \qquad \phi_g(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

If g is elliptic, it fixes two points, one in $\mathbb{R}^2{}_+$, the other in $\mathbb{R}^2{}_-$. For ρ small enough, they imply that there are two poles, one inside D, which we denote by z_ρ, the other outside D. In particular, there are no poles on the unit circle itself. Therefore,

$$\Theta_\rho(g) = \frac{(Cz_\rho+D)^{-k-2}}{1-\rho\phi_g'(z_\rho)}$$

and

$$\lim_{\rho\to 1}\Theta_\rho(g) = \frac{(Cz_1+D)^{-k-2}}{1-\rho\phi_g'(z_1)}$$

Now, note that z_1 is a fixed point under $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, which implies that $Cz_1 + D$ is an eigenvalue of g^{*-1}, precisely the one we denoted as λ_{in}.

When g is hyperbolic, there are two fixed points z_i, $i = 1, 2$ of g^* lying on the unit circle. Both correspond to the two eigenvalues of g through the relation $Cz_i + D = \text{eigv}$ of g. We now show that it is the fixed point corresponding to the eigenvalue $|\lambda| > 1$ that moves in. This immediately implies that the fixed point corresponding to $|\lambda| < 1$ moves out, since ϕ_{g^*} preserves symmetry with respect to the invariant unit circle.

Denote by z_1 the fixed point mentioned above, and by z_ρ the corresponding ones for $\rho < 1$. We have

$$\phi'_g(z_1) = \frac{1}{(Cz_1 + D)^2} = \lambda^{-2} \qquad |\lambda| > 1$$

This implies that

$$z_\rho = \rho\left(z_1 + \lambda^{-2} \cdot (z_\rho - z_1) + \mathcal{O}\big((z_\rho - z_1)^2\big)\right)$$

Denote by $\tilde{z}_\rho$ the point satisfying

$$\tilde{z}_\rho = \rho\left(z_1 + \lambda^{-2} \cdot (\tilde{z}_\rho - z_1)\right)$$

Since

$$\tilde{z}_\rho = \frac{1 - \lambda^{-2}}{1 - \rho\lambda^{-2}}\, \rho\, z_1$$

and $1 - \lambda^{-2} < 1 - \rho\lambda^{-2}$, we see that $|\tilde{z}_\rho| < \rho < 1$. Finally, we see that $\tilde{z}_\rho - z_\rho = \mathcal{O}\big((1-\rho)^2\big)$, which implies our claim that $z_\rho \in D$ is the only pole. Indeed, z_ρ is the fixed point of

$$T_\rho z = z - \frac{\rho\phi_g(z)}{\rho\phi'_g(z_1) - 1}$$

which has derivative 0 at z_1 and therefore has Lipschitz norm less than 1 inside $B(z_1, \varepsilon)$, for some fixed $\varepsilon > 0$ and all ρ. Also, since

$$|T_\rho z - z_1| \le |Tz_1 - z_1| + \|T\|_{\text{Lip}} \cdot |z - z_1|$$

we see that for ρ now sufficiently small, T maps $B(z_1, \varepsilon)$ into itself and is therefore a contraction, with z_ρ as the fixed point. This yields the estimate

$$|\tilde{z}_\rho - z_\rho| \leq \frac{|T\tilde{z}_\rho - \tilde{z}_\rho|}{1 - \|T\|_{\text{Lip}}}.$$

Since

$$T\tilde{z}_\rho - \tilde{z}_\rho = \mathcal{O}\big((z_\rho - \tilde{z}_\rho)^2\big) = \mathcal{O}\big((1-\rho)^2\big)$$

our claim follows.

Thus,

$$\begin{aligned}\Theta_\rho(g) &= \text{Res}_{z_\rho}\left(\frac{(Cz+D)^{-k-2}}{z - \rho\phi_g(z)}\right)\\ &= (Cz_\rho + D)^{-k-2} \cdot \frac{1}{1 - \rho\phi_g'(z_\rho)}\end{aligned}$$

and

$$\lim_{\rho\to 1} \Theta_\rho(g) = \frac{\lambda^{-k-2}}{1-\lambda^2} \qquad (|\lambda| > 1)$$

Finally, we will see that

$$|\Theta_\rho(g)| \leq \frac{C}{|\lambda - \lambda'|}$$

which, by Corollary A1.2, is a locally integrable function, and allows us to apply dominated convergence to conclude the statement of this proposition. QED

Lemma : *The measure on* $\mathbb{R}^2{}_+$ *defined by* $\frac{dx\wedge dy}{y^2}$ *is invariant under the action of* $SL(2, \mathbb{R})$.

PROOF: It is obviously enough to show invariance under translations, dilations and inversions. The first two are trivial; for the third, put

$$\bar{x} + i\bar{y} = \frac{-1}{x + iy}$$

or

$$\bar{x} = \frac{-x}{x^2 + y^2} \qquad \bar{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

We have

$$d\bar{x} = \frac{(x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy}{(x^2 + y^2)^4} \qquad d\bar{y} = \frac{-2xy\, dx + (x^2 + y^2)\, dy}{(x^2 + y^2)^4}$$

which implies

$$\frac{d\bar{x} \wedge d\bar{y}}{\bar{y}^2} = \frac{dx \wedge dy}{y^2}$$

QED