

Valor-en-Riesgo

Luis A. Seco

RiskLab

University of Toronto

Resumen En este artículo se presenta un método analítico para aproximar el valor en riesgo (VaR) de carteras con elevado número de factores de riesgo, y con un número arbitrario de instrumentos distintos. Es una extensión no-lineal del delta-normal-VaR utilizado por RiskMetrics. El resultado es doble: por una parte, aporta una interpretación geométrica de la relación entre el riesgo delta, gamma, y el VaR. Por otra, aproxima el VaR por otro número dado como solución a una ecuación algebraica explícita.

Introducción

EL Riesgo Las carteras de inversión experimentan pérdidas (y ganancias) por muy diversos motivos. Por una parte, cambios abruptos del mercado ocasionan con espectacularidad pérdidas generalizadas para la mayoría de las carteras de inversión. Cuando esto se combina con otros factores, puede dar lugar a situaciones extremas. Fue el caso de la caída del 15% del Nikkei, que unido a una serie de irregularidades fraudulentas, inició el proceso de desaparición de Barings Bank, que contaba con más de 200 años de historia. Pero si sólo fuera por estos fenómenos, infrecuentes e impredecibles, la gestión de riesgo no pasaría de ser una actividad íntimamente ligada a una bola de cristal.

Por otra parte, pequeños cambios del mercado también pueden llegar a ocasionar pérdidas considerables, y en ocasiones no menos espectaculares. Éste fue el caso de la bancarrota del Orange County: una cartera que había estado produciendo beneficios, llegó a perder más de mil millones de dólares debido a la tendencia a la alza de los tipos de interés de 1994. La naturaleza de estas pérdidas usualmente reside en la alta no-linearidad de los instrumentos derivados. Esta es un área con una base científica bien definida, y que permite la generación de medidas que estiman pérdidas probables.

El riesgo se puede dividir en dos tipos: *riesgo delta*, y *riesgo gamma*. El primero está basado en la dependencia lineal de la cartera de inversión respecto a los factores de riesgo. El segundo está basado en fenómenos no lineales.

Existen otros tipos de riesgo, como el riesgo de crédito, riesgo operacional, etc. En este artículo, nos restringimos al riesgo de mercado, y más principalmente al combinado de los riesgos delta y gamma. Remitimos al lector interesado al libro de P. Jorion [J], para un tratamiento más exhaustivo de estos temas, además de una narración muy atractiva de casos históricos, incluyendo el de Barings y Orange County, antes mencionados.

La Medida del Riesgo Ante la situación de riesgo financiero, caben varias actitudes.

- Ignorarla.
- Evitarla.
- Medirla.

La primera opción, por extraño que parezca, ha sido la más corriente en el pasado reciente. Sin embargo, se está extendiendo hoy en día la idea, fomentada por los organismos reguladores, que cualquiera de las otras dos alternativas es más deseable.

El evitar el riesgo es algo que, en el mejor de los casos, sólo se puede hacer de un modo bastante limitado. Se realiza normalmente a nivel de tesorería, con el apoyo y control de las oficinas intermedias.

La alternativa que queda, medir el riesgo, es por tanto inevitable. Lo que no es tan claro es el nivel de conocimiento necesario, que puede ir desde saber simplemente las pérdidas probables hasta saber las condiciones específicas que pueden dar lugar a ellas. Más adelante estudiaremos estas posibilidades de modo muy somero.

Uno de las medidas de riesgo más usual, coherente con las resoluciones de la convención de Basilea (1991), es el Valor en Riesgo: VaR.

El **VaR** de una cartera Π es el dinero que se puede perder de un día a otro con determinada certeza:

$$\mathbf{Prob} \{ \Pi(0) - \Pi(t) > \mathbf{VaR} \} = 5\%.$$

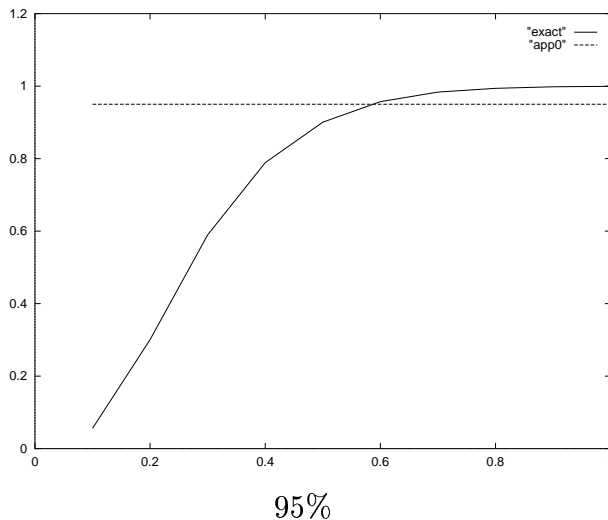
Aquí, $\Pi(0)$ denota el valor de la cartera hoy, mientras que $\Pi(t)$ denota el valor de la cartera mañana.

Hemos de puntualizar que el horizonte temporal, en vez de un día, puede ser una semana, un mes o incluso un año. Sin embargo, es siempre un periodo corto de tiempo en relación con los instrumentos que componen la cartera. En este artículo, por razones literarias, nos referiremos a este horizonte temporal como un día.

El intervalo de confianza del 95% utilizado aquí también puede variar en las aplicaciones, y puede ir hasta el 99%. Siempre sera un número cercano al 100%, lo cual justificará la sección sobre VaR asintótico a la que nos referiremos más adelante. La utilidad del 95% reside en que las predicciones de pérdidas deberían ser observadas aproximadamente una vez al mes.

Desde un punto de vista gráfico, podemos ver el VaR como el percentil del 95% de la función de distribución acumulativa de pérdidas y ganancias. Si hacemos el gráfico de la dicha función de distribución, con el eje x representando las pérdidas posibles, y el eje y

representando la probabilidad de pérdida, el VaR sería el valor de la x de la intersección de las gráficas siguientes:



VaR y volatilidad El punto de vista adoptado aquí es que los parámetros del mercado (varianzas y covarianzas) son conocidos hoy, sin entrar en consideraciones sobre si se han obtenido de manera histórica o a partir de precios observados. También suponemos saber las sensibilidades de la cartera en consideración respecto a los factores de riesgo, de nuevo sin entrar en consideraciones sobre si se calculan a base de diferencias finitas o por métodos analíticos.

El valor en riesgo está íntimamente ligado a la volatilidad. Es muy sensible a variaciones -y errores- en el cálculo o modelos de volatilidad. La ponderación histórica con pesos exponenciales, propuesta por J. P. Morgan en su documento de RiskMetrics es una alternativa popular; el cálculo basado en modelos estocásticos de volatilidad (GARCH, por ejemplo), son menos usuales.

Sin embargo, no hay que olvidar que la volatilidad es una medida del riesgo del mercado, y por tanto traduce sólo de manera indirecta en una medida de riesgo para una cartera específica; existe un concepto de volatilidad adaptado a la cartera en cuestión, que calcularemos de modo explícito más adelante, y a la que nos referiremos con el término *volatilidad de cartera*. Su cálculo utilizará la delta y la gamma de la cartera, así como la matriz de varianza/covarianza \mathbb{V} . Este punto de vista relacionará de modo explícito el

VaR con los otros tres tipos de riesgo que se tratan a menudo: volatilidad, riesgo-delta y riesgo-gamma.

El propósito de este artículo es ofrecer un resumen de diversas metodologías para calcular el VaR. Este artículo está basado en diversos trabajos en colaboración con C. Albanese (Univ. of Toronto y Morgan Stanley), R. Brummelhuis (Univ. de Reims), A. Córdoba y P. Fernández (Universidad Autónoma de Madrid), y M. Quintanilla (Univ. of Toronto).

Metodología Básica

Los métodos de cálculo de VaR se pueden clasificar de acuerdo a tres categorías:

Métodos Históricos Se basan en el comportamiento de la cartera en consideración respecto a cambios del mercado presentes en una base de datos histórica.

Conceptualmente, ofrecen la ventaja de que los escenarios sobre los que re-evalúa la cartera han sido observados, y por tanto se pueden considerar posibles. El principal inconveniente es que ignoran completamente cambios futuros del mercado distintos al pasado.

Desde el punto de vista práctico, el número de escenarios sobre el que se reevalúa la cartera es reducido, lo que incrementa su velocidad de cálculo. Sin embargo, para carteras grandes, y sobre todo para instrumentos exóticos, las necesidades de cálculo, incluso para unos pocos escenarios, resultan imprácticas. Por este motivo, esta metodología se utiliza solamente después de someter la cartera a un proceso de compresión, que reduzca tanto su tamaño como su complejidad.

No vamos a entrar aquí en el proceso de compresión, por otra parte básico en la metodología de gestión de riesgo. Remitimos al lector interesado a [D1], [D2] y [S].

Métodos de MonteCarlo Se basan en la generación de escenarios futuros. Requieren un conocimiento de la distribución probabilística de dichos escenarios, que se suele suponer normal (o log-normal), con matrices de covarianza \mathbb{V} calculadas de modo histórico.

El proceso de generación de escenarios (en el caso normal) es el siguiente:

Consideramos la cartera $\Pi(\mathbf{S})$, función de n factores de riesgo \mathbf{S} distribuidos de acuerdo a \mathbb{V} y a su valor hoy \mathbf{S}_0 . Sea $\mathbb{V}^{1/2}$ la descomposición de Choleski de \mathbb{V} . Sean ξ_1, \dots, ξ_N vectores aleatorios, independientes idénticamente distribuidos en \mathbb{R}^n , normales con media 0 y matriz de varianza/covarianza igual a la identidad. Los escenarios futuros vienen entonces dados por

$$\xi_i \cdot \mathbb{V}^{1/2} + \mathbf{S}_0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Los posibles valores de la cartera en el futuro vendrán dados por

$$\Pi_i = \Pi \left(\xi_i \cdot \mathbb{V}^{1/2} + \mathbf{S}_0 \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

El VaR se puede entonces calcular de dos modos:

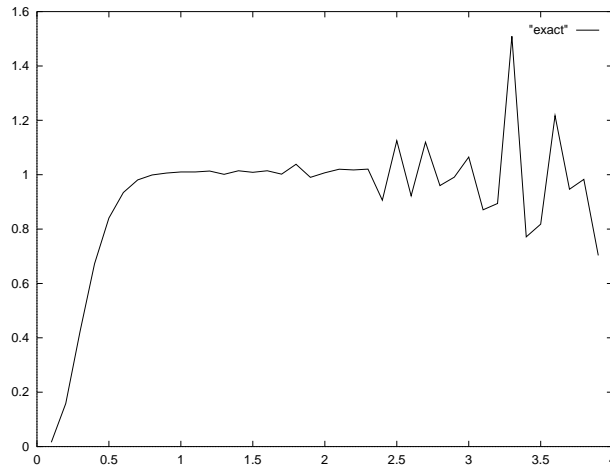
VaR paramétrico: se ajusta la distribución de Π_i a una distribución paramétrica (i.e., normal), y se calcula su desviación típica σ . De este modo,

$$\mathbf{VaR} = 1.65 \cdot \sigma.$$

VaR no paramétrico: se ordenan los valores Π_i ; VaR es el percentil del 95%.

Esta metodología básica se puede refinar con el uso de sucesiones de discrepancia baja, en sustitución de los números aleatorios. Las sucesiones de Sobol son bastante populares, aunque métodos más exóticos, basados en campos ciclotómicos por ejemplo, también son utilizados.

El problema fundamental con esta metodología es la dificultad de determinar el número de escenarios necesarios para obtener resultados fiables. El siguiente ejemplo refleja el posible comportamiento de un cálculo impreciso de la función de pérdidas y ganancias:



95%

Como antes, este es el gráfico de la función de distribución de las pérdidas de la cartera, con el eje x representando las pérdidas posibles, y el eje y representando la probabilidad de pérdida. Como el VaR sería el percentil del 95%, vemos que no hay manera de haberlo en base a los resultados del cálculo.

Dicho gráfico se obtuvo con una serie de Sobol de un millón de escenarios para una cartera con tres factores de riesgo. Obviamente este gráfico supone una exageración, obtenida a propósito, pero que pone en relieve los resultados genuinamente incorrectos que se pueden llegar a obtener cuando se utilizan métodos de Monte Carlo sin excesivo cuidado.

La fuente principal de errores en estos métodos reside en que típicamente, sólo un 5% de los escenarios generados ofrece información útil en los que al VaR se refiere. De este modo, para el gestor de riesgo, un millón de escenarios ofrecen una información comparable a 50.000 escenarios para una mesa de tesorería: es fácil imaginar las consecuencias que esto acarrea.

La solución pasa de nuevo por técnicas de compresión, tanto de carteras como de escenarios, así como en la adopción de perspectivas estadísticas que minimicen la fuente de los errores puestos de manifiesto antes. Métodos adaptados al cálculo de la función de distribución (versus cálculos probabilísticos sin más), también han sido desarrollados por A. Levin (RiskLab-Toronto).

En un intento de modelar colas largas de distribuciones, se está experimentando con

distribuciones que son sumas de normales. RiskMetrics ofrece una metodología al respecto.

Métodos Analíticos Esta categoría es un cajón de sastre, donde hay una amplia variedad de técnicas. Una de las más importantes, tanto por su sencillez como por su nivel de aceptación, es RiskMetrics, introducido por J. P. Morgan hace ya varios años. No vamos a repasar aquí la amplia metodología subyacente; simplemente mencionamos el delta-Normal-VaR, que está íntimamente relacionada con la metodología desarrollada más adelante.

Desde su punto de vista, la función de pérdidas y ganancias P&L se aproxima de acuerdo a su parte lineal –la delta– del modo siguiente: si denotamos el valor de la cartera por $\Pi(t)$, podemos aproximar

$$\Pi(t) - \Pi(0) \approx \left. \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right|_{t=0} + \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot [S_i(t) - S_i(0)], \quad (1)$$

donde las deltas respecto a cada factor de riesgo S_i vienen dadas por

$$\delta_i = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial S_i} \right|_{t=0}.$$

Con una serie de suposiciones, que incluyen la distribución normal de los factores de riesgo, y la evolución del valor de la cartera a mercado fijo igual al precio del dinero, esto da la siguiente fórmula explícita para el VaR:

$$-z \sqrt{\delta^T \cdot \mathbb{V}^{-1} \cdot \delta},$$

donde \mathbb{V} es la matriz de varianzas y covarianzas, y z es el percentil del 95% de la distribución normal univariada.

El aspecto más positivo de este punto de vista es el hecho que la fórmula no podía ser más fácil. El aspecto más negativo, y que a menudo invalida esta aproximación, es el hecho que en la práctica las carteras están relativamente bien apalancadas, lo que produce deltas pequeños. Esto tiende a infraestimar el riesgo de modo sistemático.

Merece la pena mencionar el trabajo de [SL], que supone una redefinición del VaR, y que en el espíritu del delta-normal-VaR produce algoritmos para trabajar con carteras cuadráticas.

Carteras Cuadráticas

La aproximación lineal proporciona una manera elemental de calcular VaR. Desde un punto de vista práctico, dicha aproximación es de limitada aplicabilidad, pues asigna un VaR nulo a carteras con delta nula: en la práctica, las carteras están bien apalancadas, y la delta es cercana a cero, sin que esto implique que el VaR sea necesariamente pequeño. La corrección relevante pasa por considerar la parte cuadrática de la cartera: la gamma.

De modo preciso, consideremos una cartera Π con títulos subyacentes S_1, \dots, S_n (o factores de riesgo), que dan lugar al vector subyacente:

$$\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n).$$

Los parámetros principales de la cartera ahora son

$$\text{Delta : } \quad \Delta = \nabla_{\mathbf{S}}\Pi = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial S_1}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial S_n} \right)$$

$$\text{Gamma : } \quad \Gamma = [\text{Hesiano}]_{\mathbf{S}}\Pi = \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_i \partial S_j} \right\}_{i,j=1}^n$$

El primero es un vector, mientras que el segundo es una matriz. La gamma nos proporciona la sensibilidad de la delta respecto a los factores del mercado.

Una de las características fundamentales del VaR, es su dependencia de pequeños cambios del mercado, que tienen lugar en un corto espacio de tiempo (un día). Es decir, los factores de riesgo no experimentan grandes fluctuaciones. Asimismo, la cartera no cambia mucho de valor, incluso en un mercado inmóvil. Esto sugiere un planteamiento de valoración de cartera distinto al habitual: en vez de estudiar los posibles valores de la cartera en escenarios futuros (los valores Π_i de antes), nos concentramos ahora en los cambios de valor exclusivamente, que podemos calcular con expansiones de Taylor.

Dicho de modo más preciso, la evolución del precio (o mark-to-market, o P&L), se puede estimar por su aproximación cuadrática como caso particular del Teorema de Taylor:

$$\Pi(t) \approx \Pi(0) + \partial_t \Pi(0) + \Delta \cdot \xi + \frac{1}{2} \xi \cdot \Gamma \cdot \xi^t, \quad \xi = \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(0)$$

Con esta aproximación cuadrática:

$$\mathbf{Prob} \left\{ \Delta \cdot \xi + \frac{1}{2} \xi \cdot \Gamma \cdot \xi^t < -\mathbf{VaR} \right\} = 0.05$$

con

$$\xi = \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(0).$$

Cuando ξ esta distribuido de modo normal, VaR viene dado por el valor K que soluciona la ecuación siguiente:

$$I_0(K) = \int_{x \cdot \Delta + \frac{1}{2} (x, \Gamma x) \leq -K} e^{-(x, \mathbb{V}^{-1} x)/2} \frac{dx}{\sqrt{\det 2\pi \mathbb{V}}} = 0.05$$

Hay que observar que

$$I_0(K) = 1 - \int_{x \cdot \Delta + \frac{1}{2} (x, \Gamma x) > -K} e^{-(x, \mathbb{V}^{-1} x)/2} \frac{dx}{\sqrt{\det 2\pi \mathbb{V}}},$$

que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} I_0(K) = 0,$$

y que el caso log-normal se reduce a este por un simple cambio de variables.

También mencionamos el trabajo en [KJB], en el que obtienen fórmulas asintóticas para $I_0(K)$ en el régimen inverso, cuando $K \rightarrow 0$.

La dificultad del cálculo reside en la dimensionalidad de las integrales en consideración: puede haber hasta 500 factores de riesgo, y el calcular numéricamente en dimensiones tan altas es raramente fiable.

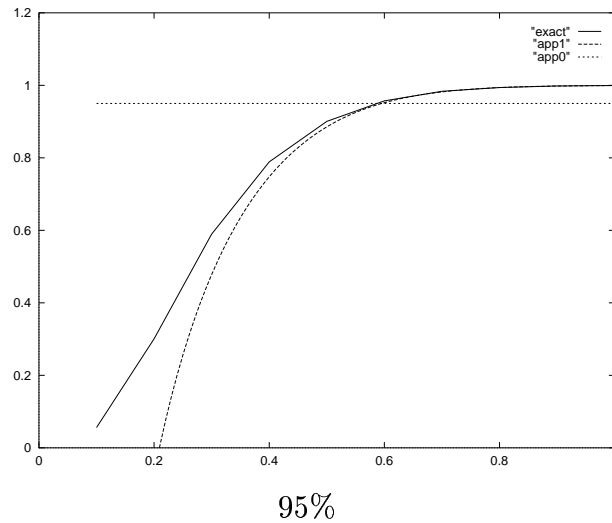
Otra dificultad reside en el hecho de lo difícil que resulta extraer información sobre el riesgo de mercado para una cartera dada, aparte de la información meramente numérica. Y esto es así, a pesar de que que estamos tratando con la integral de gaussianas sobre cuádricas, un objeto matemático aparentemente simple.

El primer punto ha sido estudiado en [M] primero, y perfeccionado luego en [BCQS], El punto de vista adoptado ahí se basa en definir el VaR como la solución a la ecuacion implícita

$$I_0(K) = \alpha,$$

para $\alpha = 0.05$, y resolver esta ecuación de manera asintótica en el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$. Las ventajas de este tratamiento residen en que la aproximación asintótica produce fórmulas algebraicas explícitas, infinitamente más fáciles de calcular que la integral I_0 , sobre todo en dimensiones altas. Presentaremos estos resultados en la sección del VaR asintótico, más adelante.

Los resultados obtenidos de este modo se pueden resumir gráficamente del modo siguiente



De estas dos curvas, una corresponde a la distribución del P&L calculado de modo exacto, mientras que la otra es el cálculo asintótico en el límite $\alpha \rightarrow 0$, dado por la fórmula explícita, que presentaremos más tarde. Como podemos ver, en este caso, el método asintótico produce resultados para el VaR prácticamente iguales al exacto.

El problema de obtener información más específica del riesgo de la cartera en cuestión fue abordado en [AS]. En dicho artículo, se explota el hecho de que la transformada de Fourier de una cuádrica es esencialmente una función de Bessel. Esto permite relacionar el VaR con el riesgo delta y gamma de modo explícito, y lo que es más: de un modo geométrico. Esto aporta una intuición, de carácter armónico, sobre la relación entre los tres tipos de riesgo. La integral anterior, de dimensionalidad complicada, se reducirá ahora a dimension dos, en todos los casos. Cada dimensión corresponde a cada una de las variables duales (constante de coupling, en la física cuántica) del riesgo delta y gamma. Es la manera de obtener fotografías de rayos-X al VaR.

Explicamos a continuación, de modo somero, estas dos técnicas de estudio del VaR. Pero primero, introducimos el concepto de volatilidad de cartera.

Volatilidad de Cartera

La integral I_0 contiene demasiados parámetros, más de los que son necesarios para determinar el VaR. En particular, la gamma y la matriz de covarianza se pueden resumir en una sola nueva matriz, \mathbb{D} , que representa la manera en que el riesgo de mercado afecta a la cartera en particular. Dicho de otro modo, la matriz \mathbb{D} aparecera al practicar una rotación en los factores de riesgo. La delta permanece, después de que se le practique la rotación apropiada, claro está.

El proceso es un ejercicio elemental en álgebra lineal, pero que incluimos aquí en su totalidad, para la comodidad del lector:

Lema

$$\begin{aligned} I_0(K) &= \int_{\Delta \cdot x + \frac{1}{2} x^t \Gamma x \leq -K} \exp(-x \mathbb{V}^{-1} x^t / 2) \frac{dx}{\sqrt{\det 2\pi \mathbb{V}}} \\ &= \int_{\frac{1}{2} x \mathbb{D} x^t \leq R} \exp(-|x - v|^2 / 2) \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}} \end{aligned}$$

donde v sustituye a la delta, \mathbb{D} sustituye a la \mathbb{V} y Γ , y R sustituye al VaR, dado por $-K$. Todos están definidos en el curso de la prueba.

Prueba:

Cambiamos de variables en I_0 haciendo $x = y \mathbb{V}^{1/2}$, y obtenemos

$$I_0(K) = \int_{\Delta' \cdot y + \frac{1}{2} y^t \Gamma' y \leq -K} \exp(-|y|^2 / 2) \frac{dy}{(2\pi)^{n/2}},$$

donde

$$\Delta' = \Delta \mathbb{V}^{1/2}, \quad \Gamma' = \mathbb{V}^{1/2} \Gamma \mathbb{V}^{1/2}.$$

La matriz Γ' es simétrica, y por tanto se puede escribir como

$$\Gamma' = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{D} \mathbb{S}$$

ejemplo, uno puede concluir que una cartera determinada está máximamente expuesta a la combinación del IBEX (en un 70%), y de la tasa de cambio ESP/USD, en un (30%).

Para ilustrar este hecho, observese que si $v = 0$, y ordenamos

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_1} \geq -\mu_1 \geq \dots \geq -\mu_{n_2}$$

entonces el factor de riesgo sintético correspondiente a μ_{n_2} es máximo responsable del riesgo de la cartera.

El método asintótico que presentamos más adelante supone un refinamiento de este hecho, proporcionandonos además información de cómo los factores de riesgo menores influyen en el riesgo de la cartera.

VaR Armónico

En esta sección presentaremos un resumen ilustrativo de las posibilidades de visualización de riesgo con técnicas de analisis de Fourier. Para más detalles, remitimos al lector a [AS]. Para simplificar la exposición, supondremos que la matric \mathbb{D} es definida positiva, y cambiamos algunas constantes.

En este caso, la fórmula de Plancherel nos brinda las siguientes fórmulas, que expresan la integral como una combinación de momentos de gaussianas:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} e^{-\pi(x-v)\mathbb{D}^{-1}(x-v)^t} dx &= R^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J_{\frac{n}{2}}(2\pi R|\xi|)}{|R\xi|^{\frac{n}{2}}} e^{-\pi(\xi, \mathbb{D}\xi)} \cos(2\pi\xi \cdot v) \frac{d\xi}{\sqrt{\det \pi\mathbb{D}^{-1}}} \\ &= \sum_{k,j}^{\infty} R^{n+2k} \pi^{k+j} a_{kj} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} (\xi \cdot v)^{2j} e^{-\pi\xi\mathbb{D}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\det \pi\mathbb{D}^{-1}}}, \end{aligned}$$

Las constantes a_{kj} son básicamente los coeficientes de Taylor de las funciones de Bessel y de la función coseno.

Para calcular cada momento de la gaussiana, definimos

$$f(\alpha, \beta) = \left\{ \det(\mathbb{D} + i\alpha + i\beta v^t v) \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

El cálculo de la función f no presenta ninguna dificultad, pues al ser la matriz \mathbb{D} diagonal, con elementos λ_j , fácilmente se puede ver que

$$f(\alpha, \beta) = \left(\prod_{j=1}^n (\lambda_j + i\alpha) \right)^{-1/2} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{i\beta |v_j|^2}{\lambda_j + i\alpha} \right)^{-1/2}.$$

Entonces tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} (\xi \cdot v)^{2j} e^{-\pi \xi \mathbb{D} \xi} d\xi = i^{k+j} \left. \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0} \left. \frac{\partial^j}{\partial \beta^j} \right|_{\beta=0} f(\alpha, \beta)$$

Calculamos las derivadas como los momentos de transformadas de Fourier:

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial \alpha^i \partial \beta^j}(0, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} (2\pi i \hat{\alpha})^k (2\pi i \hat{\beta})^j \hat{f}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) d\hat{\alpha} d\hat{\beta}.$$

Un dato técnico: la función f no es integrable en β . Sus derivadas, sin embargo, sí lo son. Por tanto, definimos

$$F(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(\hat{\alpha}\alpha + \hat{\beta}\beta)} \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

$$G(\hat{\alpha}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \hat{\alpha} \alpha} f(\alpha, 0) d\alpha,$$

lo que nos proporciona la fórmula

$$I(R) = R^{\frac{n}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^0 d\hat{\alpha} \frac{J_{\frac{n}{2}}(2R\pi\sqrt{|\hat{\alpha}|})}{(2|\hat{\alpha}|)^{\frac{n}{4}}} G(\hat{\alpha}) \right. \\ \left. + \pi i \int_{-\infty}^0 \int_{\hat{\alpha} \tan^{-1} \|v\|^2}^0 \frac{\cos(2\pi\sqrt{2\hat{\beta}}) - 1}{2\pi^2 \hat{\beta}} \frac{J_{\frac{n}{2}}(2R\pi\sqrt{|\hat{\alpha}|})}{(2|\hat{\alpha}|)^{\frac{n}{4}}} F(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) d\hat{\alpha} d\hat{\beta} \right\}$$

Esta fórmula expresa, básicamente, el VaR en función de F y G . El verdadero interés, sin embargo, radica en la manera en que las funciones F y G capturan de modo geométrico, otras propiedades de riesgo de la cartera, como el riesgo-delta; por ejemplo:

Lema La función $F(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ se anula fuera del sector

$$0 \leq \hat{\theta} \leq \tan^{-1} \|v\|^2,$$

donde $\hat{\theta}$ describe el ángulo entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

Recordamos que v era la versión girada de la delta de la cartera.

VaR Asintótico

Estamos interesados en resolver la ecuación

$$I(R) = \alpha,$$

para un número α cercano a cero. Como ya mencionamos antes, el límite $\alpha \rightarrow 0$ es equivalente a $R \rightarrow \infty$.

El objetivo de esta análisis es el de obtener una expresión algebraica para $I(R)$ que reemplace la integral. De nuevo presentamos una versión reducida de las conclusiones. En particular, supondremos aquí que $v = 0$; recordamos que esto es equivalente a suponer que la cartera esta totalmente apalancada; por otra parte, este el régimen bajo el cual el delta-nomral-VaR de RiskMetrics produce VaR nulo.

$$I(R) \approx \frac{\sqrt{2} \exp(-2R^2 \lambda_1^{-1})}{\prod_{i=2}^n (\lambda_i^{-1} - \lambda_1^{-1})^{1/2} R \lambda_1^{-1}}, \quad (3)$$

donde el error es despreciable en el límite $\alpha \rightarrow 0$.

De este modo el VaR, representado por la variable R , queda aproximado por el valor R que resuelve la ecuación

$$\frac{\sqrt{2} \exp(-2R^2 \lambda_1^{-1})}{\prod_{i=2}^n (\lambda_i^{-1} - \lambda_1^{-1})^{1/2} R \lambda_1^{-1}} = 0.05.$$

Esto supone una tremenda simplificación, al eliminar completamente la necesidad de integración numérica, fuente de la mayoría de los errores (sobre todo en dimensiones altas).

Para llegar a (3), utilizamos el hecho que, en el sentido de distribuciones,

$$e^{-|x|^2/2} = (2\pi)^{n/2} \delta_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 \Delta_x \left(\frac{e^{-|x|^2/2t}}{t^{n/2}} \right) dt$$

La prueba de ésto es un ejercicio en análisis de Fourier. De este modo, obtenemos que

$$I(R) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^{n/2}} \int_{x \in D, x \geq R} \Delta_x (e^{-|x|^2/2}) dx$$

El análisis se finaliza con el siguiente lema de aproximació

Lema *Sea D una variedad con x_0 a distancia mínima del origen. Entonces, tenemos que*

$$\int_D \Delta(\exp(-\lambda|x|^2/2)) dx = e^{(-\lambda|x_0|^2/2)} \sum_{\nu < N} c_\nu \lambda^{-(n-3)/2-\nu} + O(\lambda^{-(n-3)/2-N}),$$

donde λ se supone un parámetro grande. El primer término de la expansión viene dado por

$$c_0 = 2(2\pi)^{(n-1)/2} \cdot |x_0| \cdot \det(I + |x_0|K)^{-1/2},$$

donde K es la matriz diagonal con elementos igual a las curvaturas principales de ∂D at x_0 .

Remitimos al lector interesado a [M], para los detalles de esta derivación.

Referencias

[AS] C. Albanese, L. Seco “*Harmonic Analysis in Value at Risk Calculations*”, Preprint, Univ. of Toronto.
<http://www-risklab.erin.utoronto.ca/research.htm>

[BCQS] R. Brummelhuis, A. Córdoba, M. Quintanilla, L. Seco “*Asymptotic Value at Risk*”, In preparation.

[D1] R. Dembo, “*Scenario Optimization*”, *Annals of Operations Research* **30**, pp 63 — 80 (1991).

- [D2] R. Dembo, “*Scenario Immunization*”, Financial Optimization, Cambridge Univ. Press, S. Zenios, Editor (1993).
- [J] P. Jorion, “*Value at Risk*”, Irwin Professional Publishing, 1997.
- [KJB] S. Kotz, N. L. Johnson, D. W. Boyd, “*Distribution of quadratic forms. I and II*” Ann. Math. Statistics **38**, 823 — 848 (1995).
- [M] Maria Quintanilla “*An Asymptotic Expansion for Value at Risk*”, M.Sc. Thesis, University of Toronto (1997). <http://www-risklab.erin.utoronto.ca/research.htm>
- [S] D. Saunders, “*Applications of Optimization to Mathematical Finance*”, M.Sc. Thesis, University of Toronto (1997). <http://www-risklab.erin.utoronto.ca/research.htm>
- [SL] Studer, Lüthi, “*Quadratic Maximum Loss*”, Net Exposure, 1997, <http://www.netexposure.com>.